ЛЕТНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА “АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ”
ЯРОСЛАВЛЬ, 25–31 ИЮЛЯ 2017

Валерий Алексеев *Вырождения абелевых многообразий*

Лекции посвящены теории вырождений абелевых многообразий, включая якобианы, многообразия Прима и Прима–Тюрина, начиная с классических конструкций Мамфорда и Тэйта и кончая недавними результатами Касалана-Мартин, Грушевского, Хулека, Лазы о вырождениях промежуточных якобианов и Алексеева, Донаги, Фаркаша, Изади, Ортеги о 6-мерных абелевых многообразиях.

Алексей Бондал *Некоммутативные деформации коммутативных многообразий*

Курс посвящен деформациям обычных алгебраических многообразий в некоммутативные.

Мы обсудим как можно понимать что такое некоммутативное многообразие, какими дифференциально-геометрическими данными задается инфинитезимальная деформация коммутативного многообразия в некоммутативное и какого типа геометрические данные определяют продеформированное некоммутативное многообразие.

Лекция 1. Некоммутативное многообразие как абелева категория с подходящими гомологическими условиями. Скобки Пуассона как касательные векторы к пространству некоммутативных деформаций. Примеры скобок Пуассона на проективных пространствах. Схемы вырождений для скобок Пуассона. Гипотеза о размерности схем вырождений для скобок Пуассона на многообразиях Фано.

Лекция 2. Частичная связность Ботта. Доказательство гипотезы вырождения в размерности 3 и 4. Гипотеза о схемах нулей скобок Пуассона. Интерпретация схем нулей скобок Пуассона в терминах инфинитезимальных деформаций пучков небоскребов. Доказательство гипотезы о схемах нулей в размерности 3. Обсуждение классификации скобок Пуассона на проективном пространстве.

Лекция 3. Некоммутативные деформации проективных поверхностей. “Пучки идеалов нульмерных схем” для некоммутативных деформаций. Пространство модулей пучков идеалов нульмерных схем для некоммутативных деформаций проективных поверхностей. Примеры деформаций этих пространств модулей для случая некоммутативных деформаций проективной плоскости и двумерной квадрики. Подход к описанию некоммутативных деформаций через производные категории.

Hélène Esnault *Connections in characteristic* 0 *and* $p > 0$

We shall review the basic properties of integrable connections and the Deligne Riemann–Hilbert correspondence (Deligne, Lecture Notes 163), the basic properties of Simpson's correspondence (Simpson, Publ. math.IHES 75 (1992)), the notion of p-curvature of connections in characteristic $p > 0$ (Katz, Publ. Math. IHES 39 (1970)), the Hitchin map in characteristic $p > 0$ (Groechenig, Math. Res. Let. 23 (2016)), Grothendieck's p-curvature conjecture, the classical results and recent progresses.

Дмитрий Захаров *Тропическая теория Брилля–Нётера*

Классическая теория Брилля–Нётера изучает специальные дивизоры на алгебраических кривых — дивизоры, полные линейные системы которых имеют неожиданно большую размерность. Простейшими примерами кривых со специальными дивизорами являются гиперэллиптические кривые, и алгебраические кривые можно классифицировать по наличию специальных дивизоров того или иного типа. Интуитивно следовало бы ожидать, что наличие специальных дивизоров является исключением, и что на алгебраической кривой общего положения множество специальных дивизоров имеет минимальную возможную размерность. Это утверждение было доказано Гриффитсом и Харрисом в 1980 году в [1], и является одним из важнейших достижений современной алгебраической геометрии. Тропическая геометрия — обширная новая область математики, изучающая комбинаторные аналоги классических геометрических объектов. Тропическим аналогом теории Брилля–Нётера является теория дивизоров на метризованных графах. Можно ввести тропические аналоги основных понятий — дивизора, линейной эквивалентности, канонического класса, теоремы Римана–Роха и группы Пикара. Более того, существует тесная связь между дивизорами на алгебраических кривых и дивизорами на графах. В отличие от классической теории, тропическая теория дивизоров относится к элементарной алгебре, и все доказательства носят комбинаторный характер. Тем самым, многие сложные вопросы геометрии кривых можно свести к вопросам о существовании графов с теми или иными свойствами. Основная задача курса — разобрать тропическое доказательство теоремы Гриффитса–Харриса, содержащееся в статье [2]. Первая и последняя лекции потребуют определенных знаний из алгебраической геометрии, тогда как вторая и третья лекции будут вполне элементарными.

Крайне полезными будут лекции курса по тропической теории Брилля–Нётера с сайта Сэма Пейна [6].

[1] P. Griffiths and J. Harris, *On the variety of special linear systems on a general algebraic curve*, Duke Math. J. 47 (1980), no. 1, 233–272.

[2] Filip Cools, Jan Draisma, Sam Payne, Elina Robeva, *A tropical proof of the Brill–Noether Theorem*, arXiv:1001.2774

[3] Andreas Gathmann, Michael Kerber, *A Riemann–Roch theorem in tropical geometry*, arXiv:math/0612129

[4] Matthew Baker, Serguei Norine, *Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph*, arXiv:math/0608360

[5] Matthew Baker, *Specialization of linear systems from curves to graphs*, arXiv:math/0701075

[6] Dave Jensen, Sam Payne, lecture notes for a seminar course on tropical Brill–Noether theory:
http://users.math.yale.edu/%7Esp547/Math665.html

Дмитрий Орлов *Некоммутативные алгебраические многообразия, их свойства и геометрические реализации*

Данный курс лекций будет посвящен некоммутативной и производной алгебраической геометрии. Мы введем понятие некоммутативного и производного алгебраического многообразия. Данный подход связан с обобщением оснащенных производных категорий (квази)когерентных пучков на обычных алгебраических многообразиях. Будут обсуждены различные свойства некоммутативных многообразий, такие как регулярность, гладкость и собственность. Планируется также рассказать про новую операцию для некоммутативных многообразий, которой нет в коммутативном случае. Данная операция называется склеивание. Будет определено понятие геометрической реализации некоммутативных многообразий и рассмотрены некоторые явные примеры таких реализаций для исключительных наборов. Будут также обсуждаться различные важные примеры некоммутативных гладких, собственных многообразий и их связь с зеркальной симметрией.

Никита Розенблюм *Symplectic structures on moduli spaces and quantization*

Many moduli problems of interest, such as moduli spaces of local systems, come equipped with a natural symplectic structure. The theory of shifted symplectic and Poisson structures is a vast generalization of algebraic symplectic geometry which provides a natural framework for studying these symplectic structures. In addition to being a natural setting for the BV approach to Feynman integration, this theory provides a robust framework for various counting problems in geometry and topology, such as the theory of Donaldson–Thomas invariants and its generalizations. In these lectures we will give an overview of derived geometry and the theory of shifted symplectic structures with an emphasis on applications to moduli problems.

No prior experience with derived algebraic geometry will be assumed, but familiarity with homotopical algebra will be helpful.

Иван Чельцов *G-эквивариантная бирациональная геометрия*

Данный курс лекций будет посвящен G-эквивариантной бирациональной геометрии рациональных поверхностей и рациональных трехмерных многообразий с действием конечной группы G. В первой лекции мы дадим обзор известных результатов в двумерном случае, базируясь на одном конкретном примере Игоря Долгачева и Василия Исковских. Этот пример послужил отправной точкой для описания конечных подгрупп в группе бирациональных автоморфизмов плоскости (группе Кремоны ранга 2). Во второй лекции будут рассмотрены два метода доказательства отсутствия G-эквивариантных бирациональных перестроек между трехмерными многообразиями Фано. Один из этих методов классический, а другой использует базовые свойства множительных идеалов. Мы разберем несколько конкретных примеров для иллюстрации плюсов и минусов обоих методов.