Свойство (Т) Каждана

лекция 3: Конструкция Гельфанда-Наймарка-Сегала

Миша Вербицкий

31 июля 2016

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия VI"
24 - 31 июля, 2016, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Ядра положительного типа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – топологическое пространство, а ρ – непрерывная функция на $X \times X$, удовлетворяющая $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. **Финитная функция** на X есть комплекснозначная функция, которая равна нулю вне конечного множества точек на X. Обозначим за F_{x_i,c_i} функцию, которая принимает значение c_i на точке x_i, и равна нулю вне c_i. Функция ρ называется **ядром положительного типа**, если для любой финитной функции F_{x_i,c_i} верно $\sum_i \rho(x_i,x_j)c_i\bar{c}_j \geqslant 0$. Обозначим полученную полуэрмитову форму на финитных функциях за B_ρ,

$$B_\rho(F_{x_i,c_i}, F_{x'_i,c'_i}) = \sum_i \rho(x_i,x'_j)c_i\bar{c}'_j.$$

Конструкция Гельфанда-Наймарка-Сегала

ТЕОРЕМА: (Конструкция Гельфанда-Наймарка-Сегала: GNS) Пусть ρ – ядро положительного типа на X. Тогда **существует гильбертово пространство (H,h) и непрерывное отображение $P_\rho: \ X \longrightarrow H$ такое, что для любых $x, y \in H$, имеем $\rho(x,y) = h(P_\rho(x), P_\rho(y))$.** Более того, **каждое непрерывное отображение $X \longrightarrow H$ с плотным образом получается таким образом.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть H_0 – пространство финитных функций на X, снабженное метрикой B_ρ. Это эрмитово векторное пространство, свободно порожденное точками X, с полуэрмитовой метрикой, которая определяется из формулы $h(x,y) := \rho(x,y)$. Эта метрика неотрицательно определена, поскольку ρ это ядро. Обозначим за H пополнение H_0 в этой метрике, профакторизованное по всем векторам с квадратом 0. **Тавтологическое отображение $P_\rho: \ X \longrightarrow H$, очевидно, удовлетворяет $\rho(x,y) = h(P_\rho(x), P_\rho(y))$.**

Если мы начали с какого-то отображения P_ρ, ρ из него восстанавливается тавтологически, так что эта конструкция обратима. ■

Свойства ядер положительного типа

ТЕОРЕМА: Для любых ядер ρ, μ положительного типа, **следующие функции – тоже ядра:** (а) $\rho_1(x,y) := \overline{\rho(y,x)}$, (б) $t\rho$ для любого $t \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ (в) сумма $\rho+\mu$ (г) произведение $\rho\mu$ (д) поточечный предел любого семейства ядер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: (а), (б), (в), (д) очевидно, (г) получается применением GNS к тензорному произведению гильбертовых пространств.

■

Другими словами, **пространство ядер положительного типа – выпуклый конус, замкнутый относительно умножения и взятия поточечных пределов.**

Унитарные представления (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическая группа есть группа G, снабженная топологией, таким образом, что операции умножения и взятия обратного непрерывны. **Топология на G предполагается метризуемой,** в частности – хаусдорфовой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Унитарное представление группы G есть гомоморфизм из G в группу линейных изометрий гильбертова пространства H такой, что функция $h \longrightarrow g(h)$ непрерывна как функция g для любого $h \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Неприводимое представление есть представление G в гильбертовом пространстве H такое, что H не содержит **подпредставлений**, то есть замкнутых, G-инвариантных подпространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть H – унитарное представление группы G. Вектор $x \in H$ называется **циклическим**, если H есть минимальное подпредставление H, содержащее x.

ЗАМЕЧАНИЕ: Все ненулевые векторы в неприводимом представлении циклические. Также **циклические векторы содержатся во многих приводимых представлениях.**

Функции положительного типа на группе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Функция положительного типа** на топологической группе G есть непрерывная функция $\varphi: \ G \longrightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\rho(g,g_1) := \varphi(g_1^{-1}g)$ ядро положительного типа. Иначе говоря, функции положительного типа суть G-инвариантные ядра положительного типа.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть (H,h) – унитарное представление группы G, а $x\in H$ – любой вектор. **Тогда $\varphi(g) := h(g(x),x)$ есть функция положительного типа.** Действительно, $g,g_1 \longrightarrow h(g_1^{-1}g(x),y) = h(g(x),g_2(y))$ – положительно определенное ядро на G.

ТЕОРЕМА: **(GNS-конструкция для унитарных представлений)** Пусть φ – функция положительного типа. **Тогда существует представление (H,h) группы G и циклический вектор $x\in H$ такой, что $\varphi(g) = h(g(x),x)$.** Более того, это представление однозначно определяется функцией φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применим GNS-конструкцию к G и ядру $\rho(g,g_1) := h(g_1^{-1}g(x),x)$. Соответствующее пространство финитных функций H_0 состоит из линейных комбинаций вида $\sum c_i g_i(x)$, и g на нем действует по формуле $g\left(\sum c_i g_i(x)\right) = \sum c_i g g_i(x)$, то есть изометриями. Пополнение H_0, профакторизованное по ядру формы B_ρ, есть замыкание векторов вида $g(x)$, то есть $x=e(x)$ там циклический. ■

Функции положительного типа и неприводимые представления

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть C замкнутый, выпуклый конус в топологическом векторном пространстве. **Экстремальный вектор** C есть вектор $v \in C$ такой, что для любого разложения $v = v_1 + v_2$, $v_1, v_2 \in C$, векторы v_1 и v_2 пропорциональны v.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если φ, ψ – две функции положительного типа на G, а H_φ, H_ψ соответствующие унитарные представления, то $\varphi + \psi$ соответствует прямой сумме представлений. Поэтому **неприводимые представления соответствуют экстремальным векторам в пространстве функций положительного типа.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $P_1(G)$ есть пространство функций положительного типа на группе, таких, что $\varphi(e) = 1$. Поскольку в унитарном представлении $|h(g(x), x)| \leqslant |x|^2 = 1$, все функции из $P_1(G)$ ограниченны. Поскольку поточечный предел функций из $P_1(G)$ снова лежит в $P_1(G)$, **из теоремы Тихонова о компактности следует, что $P_1(G)$ компактно.**

ЗАМЕЧАНИЕ: "Поточечную топологию" более правильно называть **слабой-* топологией**. Это самая слабая топология на функциях на множестве X, в которой отображение $f \longrightarrow f(x)$ непрерывно для каждой точки $x \in X$.

Двойственность Понтрягина

Пусть G – локально компактная абелева группа. Гомоморфизм $G \longrightarrow S^1$ называется **характером** G. Интерпретируя такие гомоморфизмы как 1-мерные унитарные представления G, мы можем снабдить группу $\widehat{G}$ характеров топологией Фелла. Оно называется **группой, двойственной по Понтрягину** к G. Имеет место тавтологическое отображение $G \longrightarrow \hat{\widehat{G}}$.

ТЕОРЕМА: ("Двойственность Понтрягина") Для каждой локально компактной абелевой группы G, двойственная по Понтрягину группа $\widehat{G}$ тоже локально компактна. Более того, **тавтологическое отображение $G \longrightarrow \hat{\widehat{G}}$ – изоморфизм.**

ТЕОРЕМА: Пусть G – локально компактная абелева группа. **Неприводимые унитарные представления G одномерны, и соответствуют характерам.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из спектральной теоремы. ■

СЛЕДСТВИЕ: Экстремальные точки в конусе функций положительного типа суть отображения вида $g \longrightarrow u\chi(g)$, где $\chi \in \widehat{G}$. ■

Вероятностные меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вероятностная мера** есть интегрируемая комплексно-значная функция μ такая, что $\int_X |\mu| = 1$. На вероятностных мерах определена **слабая-$*$ топология:** слабейшая топология такая, что $f \longrightarrow \int_X \mu f$ непрерывно для любой непрерывной, ограниченной функции f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $M_1(X)$ пространство вероятностных борелевских мер. Легко видеть, что $M_1(X)$ это выпуклый конус. Определим **атомарную меру** как такую меру δ_x, что $\mu(U) = 1 \Leftrightarrow U$ содержит x.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **экстремальные точки в конусе $M(X)$ конечных мер есть меры вида $u\delta_x$, где $u \in \mathbb{R}$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $M_{\leqslant 1}(X)$ – все меры в $M_1(X)$ такие, что $\int_X |\mu| \leqslant 1$. Докажите, что $M_{\leqslant 1}(X)$ **компактно в слабой-$*$ топологии**.

Преобразование Фурье на локально компактной абелевой группе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – локально компактная группа, а μ – вероятностная мера на $\widehat{G}$. **Преобразование Фурье** $\widehat{\mu}$ есть функция на G, заданная

$$\widehat{\mu}(g) := \int_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) d\widehat{G},$$

где $d\widehat{G}$ есть мера Хаара на $\widehat{G}$, а $\chi : G \longrightarrow S^1$ – точка $\widehat{G}$, то есть характер.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждой вероятностной меры μ на $\widehat{G}$, функция $\widehat{\mu}$ – положительного типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Меры на $\widehat{G}$ образуют выпуклый конус, как и функции положительного типа на G. В силу теоремы Крейна-Мильмана, достаточно доказать, что $\widehat{\mu}$ – функция положительного типа, если μ – экстремальная точка в конусе мер. Такие меры имеют вид $\mu := \delta_\chi$, где $\chi \in \widehat{G}$. Для такой меры, $\widehat{\mu}(g) = \chi(g)$. Рассмотрим $g \longrightarrow \chi(g)$ как одномерное представление G, порожденное вектором v. **Тогда $h(g(v), v) = \chi(g) = \widehat{\mu}$, то есть это функция положительного типа.** ■

Теорема Бохнера

ТЕОРЕМА: (теорема Бохнера)
Пусть G – локально компактная абелева группа, $M_1(\widehat{G})$ – пространство вероятностных мер на $\widehat{G}$, а $P_1(G)$ – пространство функций f положительного типа с условием $f(e) = 1$. **Тогда отображение $\mu \longrightarrow \widehat{\mu}$ индуцирует биекцию между $M_1(\widehat{G})$ и $P_1(G)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Легко видеть, что $\widehat{\mu}(e) = \int_{\widehat{G}} \mu$, так что преобразование Фурье переводит $M_1(\widehat{G})$ в $P_1(G)$. Оно инъективно в силу обратимости преобразования Фурье, и непрерывно в слабой-$*$ топологии. Сюрьективность легко следует из того, что экстремальные точки конуса переходят в экстремальные точки. ■

СЛЕДСТВИЕ: (SNAG: Stone, Naimark, Ambrose, Godement)
Пусть G – локально компактная абелева группа. **Классы изоморфизма пар (унитарное представление G, циклический вектор в нем) биективно соответствуют мерам $\mu \in M_1(\widehat{G})$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Получается сразу из применения GNS-конструкции к к пространству $P_1(G) = M_1(\widehat{G})$. ■

Свойство Каждана (Т) (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Напомню, что **диаметр** метрического пространства M есть $\operatorname{diam}(M) := \sup_{x,y \in M} d(x,y)$. Пусть H есть унитарное представление локально компактной группы G, а $\{\xi_i\} \subset H$ – последовательность единичных векторов. Она называется **почти инвариантной**, если для каждого компакта $K \subset G$, имеем $\lim_i \operatorname{diam}(K\xi_i) = 0$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G **удовлетворяет свойству Каждана (Т)**, если любое унитарное представление G, содержащее почти инвариантные векторы, содержит G-инвариантный вектор.

ТЕОРЕМА: **Группа $SL(n,\mathbb{R})$ обладает свойством Каждана (Т) для каждого $n > 2$ и не обладает им для $n = 2$.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть G – группа со свойством (Т), H ее представление, а $\{\xi_i\} \subset H$ – почти инвариантная последовательность. Рассмотрим ортогональную проекцию $\Pi_{inv}: H \longrightarrow H^G$ на пространство G-инвариантов. **Тогда** $\lim_i |\xi_i - \Pi_{inv}(\xi_i)| = 0$**.**

Лемма о пинг-понге

ЛЕММА: Пусть F – группа, порожденная элементами a, b бесконечного порядка действует на множестве X, а $A, B \subset X$ – непересекающиеся подмножества, такие, что $a^n(B) \subset A$ и $b^n(A) \subset B$ для любых $n \neq 0$. **Тогда F – свободная группа от двух образующих.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Слово вида $a^{n_1}b^{n_2}a^{n_3}...b^{n_p}$ называется **редуцированным**, если все $n_i \neq 0$. Пусть два разных редуцированных слова равны в F, а никакие слова меньшей длины не равны в F. Оба эти слова заканчиваются на a^i либо на b^j, ибо переводят A в B либо B в A. Если степень b и a одного знака, мы выкинем последнее b или a из обоих, получим слова меньшей длины, придя к противоречию. Если же одно из них заканчивается на b^i а другое на b^{-j}, $i, j > 0$, мы умножим оба на b^j справа, и получим равные в F слова, которые заканчиваются на разные буквы, что невозможно. ■

Лемма о пинг-понге и $SL(2,\mathbb{Z})$

ПРИМЕР: Рассмотрим подгруппу $F\subset SL(2,\mathbb{Z})$, порожденную $a=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ и $b=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$. Пусть

$$A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \mid \ |x|<|y|\} \quad \text{и} \quad B:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \mid \ |x|>|y|\}.$$

Тогда $a^n(B)\subset A$ и $b^n(A)\subset B$. Значит, F свободна.

СЛЕДСТВИЕ: **$SL(2,\mathbb{Z})$ не обладает свойством (Т)**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $F\subset SL(2,\mathbb{Z})$ – свободная подгруппа конечного индекса **(докажите это)**. Свободная группа не обладает свойством (Т) (лекция 1). С другой стороны, **свойство (Т) для группы и для ее подгруппы конечного индекса равносильно.** ■

Лемма о центре

ЛЕММА: Пусть $K \subset H$ – замкнутое, выпуклое подмножество гильбертова пространства. **Тогда в K существует вектор минимальной длины, и он единственный.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $r := \inf_{x \in K} |x|$. Обозначим за $B_t(0)$ шар с центром в 0 и радиусом t. **Любой отрезок в $B_{r+\varepsilon}(0) \backslash B_r(0)$ имеет длину не больше $2\sqrt{(r+\varepsilon)^2 - r^2}$** (катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $r+\varepsilon$ и вторым катетом r).

Шаг 2: Если $x, y \in K$ лежат в шаре $B_{r+\varepsilon}(0)$, они лежат в $B_{r+\varepsilon}(0) \backslash B_r(0)$, то есть расстояние между ними ограничено $2\sqrt{2r\varepsilon + \varepsilon^2}$ (шаг 1). Значит, **любая последовательность точек $x_i \in K$ такая, что $\lim_i d(0, x_i) = r$, является последовательностью Коши.** Ее предел – точка $x \in K$ такая, что $|x| = r$. ■

Лемма о центре и унитарные представления

СЛЕДСТВИЕ: Пусть H – унитарное представление G, а $v \in H$ – единичный вектор такой, что его орбита имеет диаметр меньше $\frac{1}{2}$. **Тогда H содержит неподвижный вектор.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Замыкание выпуклой оболочки орбиты Gv не содержит 0, а значит, вектор минимальной длины ненулевой и G-инвариантный. ■

УПРАЖНЕНИЕ: (лемма об описанных шарах) Выведите из этой леммы следующее утверждение. Пусть $K \subset H$ – ограниченное подмножество гильбертова пространства. **Тогда существует замнутый шар наименьшего радиуса, содержащий K.** Более того, **такой шар – единственный.**

Свойство Каждана (T) для пары

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Маргулис) Пусть $G_1 \subset G$ – подгруппа. Говорится, что **свойство (T) выполнено для пары** (G, G_1) если для любого унитарного представления G с почти инвариантными векторами, в нем найдется G_1-инвариантный вектор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Напомню, что **норма тотальной вариации** на конечных мерах (не обязательно положительных) есть $|\mu|_{TV} := \int |\mu|$.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим группу $G = SL(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ аффинных движений $\mathbb{R}^2$, сохраняющих объем, и пусть $G_1 = \mathbb{R}^2 \subset G$ – подгруппа переносов. **Тогда пара (G, G_1) обладает свойством Каждана (T).**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\{\xi_i\}$ – почти инвариантные векторы в унитарном представлении H. Рассмотрим H как представление G_1, и пусть $\mu_i \in M_1(\widehat{G}_1)$ вероятностные меры, которые соответствуют паре (H, ξ_i) по SNAG. Поскольку $(g\xi_i, \xi_i)$ сходится к 1 на компактах, соответствующие меры μ_i сходятся к атомарной мере δ_0 в слабой-* топологии. Мы получили, что **для любого компакта $K \subset G$, верно $\lim_i \sup_{g\in K} |\mu_i - g(\mu_i)|_{TV} = 0$.**

Свойство Каждана (Т) для пары (2)

ТЕОРЕМА: Рассмотрим группу $G = SL(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ аффинных движений $\mathbb{R}^2$, сохраняющих объем, и пусть $G_1 = \mathbb{R}^2 \subset G$ – подгруппа переносов. **Тогда пара (G, G_1) обладает свойством Каждана (Т).**

Шаг 2: Пусть $a, b \in SL(2,\mathbb{Z})$ такие, как описано выше, а $A, B \subset \mathbb{R}^2$ соответствующие подмножества $\mathbb{R}^2$:

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ | \ \ |x| < |y|\} \ \text{ и } \ B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ | \ \ |x| > |y|\}.$$

причем $a^n(B) \subset A$ и $b^n(A) \subset B$. Выберем N такое, что $|\mu_i - g(\mu_i)|_{TV} < \varepsilon$ для компакта K, содержащего a и b. для $i > N$. Тогда $\mu_i(B) \geqslant \mu_i(bA) \geqslant \mu_i(A) - \varepsilon$, и аналогично $\mu_i(A) \geqslant \mu_i(B) - \varepsilon$. Это дает $\mu_i(b^2 A) + 3\varepsilon\mu_i(B) \geqslant \mu_i(b^2 A)$. С другой стороны, $Z := B \backslash b^2 A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ | \ \ 3y \geqslant |x| > |y|\}$. В силу вышеописанного, $\mu_i(Z) \leqslant 3\varepsilon$. Выберем компакт $K \subset SL(2,\mathbb{R})$ таким образом, чтобы $K(Z) = \mathbb{R}^2$. **Тогда $|\mu_i - \delta_0| < 6\varepsilon$.**

Шаг 3: В силу изложенного, для любых $s \in G_1$, $v \in H$, имеем $(s(v), v) > 1 - 6\varepsilon$. В силу леммы о центре, H **содержит G_1-инвариантные векторы.**

■

Феномен Маутнера

ЛЕММА: (Moore, Mautner)
Пусть U_+ – верхнетреугольная унипотентная подгруппа в $SL(2,\mathbb{R})$, $U_+ = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а H – унитарное представление. Тогда каждый U_+-инвариантный вектор $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантен.

Доказательство. Шаг 1:

$$h_t := \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ \varepsilon & e^{-t} \end{pmatrix} = u_+\left(\frac{e^t-1}{\varepsilon}\right) u_-(\varepsilon) u_+\left(\frac{e^{-t}-1}{\varepsilon}\right) \in U^+ u_-(\varepsilon) U^+,$$

где $u_-(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$. Из U_+-инвариантности $v \in H$ получаем $(h_t(v), v) = (u_-(\varepsilon)v, v)$

шаг 2: В силу непрерывности $u_-(\varepsilon)v$ как функции от ε получаем, что $\lim\limits_{\varepsilon\mapsto 0} u_-(\varepsilon)v = v$, что влечет $(h_t(v), v) = (v, v)$ и h_t-инвариантность v.

шаг 3: С другой стороны, $h_t u_-(s) h_{-t} = u_-(e^{-t}s)$. Поэтому $(u_-(s)v, v) = (u_-(e^{-t}s)v, v)$. Устремляя t к бесконечности и пользуясь непрерывностью представления, получаем $(u_-(s)v, v) = (v, v)$. Значит, v инвариантен относительно u_-, h_t и u_+. ■

Теорема Каждана для $SL(3,\mathbb{R})$

ТЕОРЕМА: Группа $SL(3,\mathbb{R})$ обладает свойством Каждана (Т).

Доказательство. Шаг 1: Пусть H – представление $SL(3,\mathbb{R})$ с почти инвариантными векторами. Рассмотрим пространство A векторов вида $(1,x,y)$. Легко видеть, что стабилизатор A в $SL(3,\mathbb{R})$ есть аффинная группа $SL(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$. В силу свойства (Т) для пары $SL(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2$, **в H есть вектор v, инвариантный относительно подгруппы $P \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subset SL(3,\mathbb{R})$,** которая действует на A параллельными переносами.

Шаг 2: В силу феномена Маутнера, v также инвариантен относительно групп $\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$. Легко усмотреть (например, взяв сумму соответствующих алгебр Ли), что **такие подгруппы порождают все $SL(3,\mathbb{R})$, а значит, v $SL(3,\mathbb{R})$-инвариантен.** ∎