Свойство (T) Каждана

лекция 1: топология Фелла

Миша Вербицкий

25 июля 2016

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия VI"
24 - 31 июля, 2016, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Гильбертово пространство

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гильбертово пространство** есть комплексное векторное пространство, снабженное эрмитовой структурой, и полное в соответствующей метрике. Оно также предполагается **сепарабельным** (то есть имеющим счетное, плотное подмножество).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **все гильбертовы пространства изоморфны.**

ЗАМЕЧАНИЕ: **Норма** оператора A на гильбертовом пространстве H есть $\|A\| := \sup_{v\in H} \frac{|A(v)|}{|v|}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что **оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда его норма ограниченна.**

ЗАМЕЧАНИЕ: На группе $U(H)$ изометрий гильбертова пространства задана **сильная топология**: это топология, в которой база окрестностей точки $u \in U(H)$ порождается множествами $A(x,\varepsilon)$, где $x \in H$, а $\varepsilon > 0$: $A(x,\varepsilon)$ это все автоморфизмы $v \in U(H)$ такие, что $|u(x) - v(x)| < \varepsilon$.

Унитарные представления

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическая группа есть группа G, снабженная топологией, таким образом, что операции умножения и взятия обратного непрерывны. **Топология на G предполагается метризуемой,** в частности – хаусдорфовой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Унитарное представление группы G есть гомоморфизм из G в группу линейных изометрий гильбертова пространства, непрерывный (в сильной топологии) на каждом компакте $K \subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Неприводимое представление есть представление G в гильбертовом пространстве H такое, что H не содержит **подпредставлений**, то есть замкнутых, G-инвариантных подпространств.

Борелевские меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Борелевские подмножества** топологического пространства суть подмножества, полученные из открытых счетным числом применений операций взятия объединения, пересечения и дополнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Борелевская мера** есть счетно-аддитивная мера на борелевских множествах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическая группа, $g \in G$ ее элемент. Обозначим за $L^g: G \longrightarrow G$ операцию **действия группы слева**, $x \longrightarrow gx$, а за R^g – **правое действие**, $x \longrightarrow xg^{-1}$. Борелевская мера μ называется **лево-инвариантной**, если $L^g_*(\mu) = \mu$, для любого $g \in G$, и **право-инвариантной**, если $R^g_*(\mu) = \mu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Борелевская мера называется **локально конечной**, если у каждой точки есть окрестность, мера которой конечна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть K компактно, а мера μ локально конечна. **Тогда $\mu(K)$ конечно (докажите это).**

Мера Хаара

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Левая (правая) мера Хаара** на топологической группе есть лево- или правоинвариантная локально конечная борелевская мера на G.

ПРИМЕР: Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как топологическую группу, с аддитивной групповой структурой. **Тогда мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ является мерой Хаара** (и правой, и левой, так как $\mathbb{R}^n$ коммутативная группа).

ТЕОРЕМА: На любой локально компактной группе G **существует мера Хаара, как правая, так и левая**. Обе меры единственны с точностью до константы.

Регулярное представление

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство называется **локально компактным**, если у него есть база окрестностей U_i, замыкания которых компактны, и **σ-компактным,** если оно есть счетное объединение компактов. **Локально компактная группа** есть топологическая группа, которая локально компактна. В дальнейшем **локально компактные группы будут по умолчанию предполагаться σ-компактными.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G локально компактная группа, μ мера Хаара, а $L^2(G)$ – пополнение пространства всех непрерывных функций f с $\int_G |f|^2\mu < \infty$ по метрике, определенной как $|f| := \sqrt{\int_G |f|^2\mu}$ (такие функции называются **L^2-интегрируемыми**). Группа G действует на себе сдвигами: $g(x) = gx$, это определяет действие на L^2-интегрируемых функциях. Пространство $L^2(G)$ называется **регулярным представлением** G.

Следующая теорема является неплохой задачей (олимпиадного уровня); пользоваться ей мы не будем.

ТЕОРЕМА: (Петер-Вейль)
Пусть G – компактная группа. **Тогда любое неприводимое унитарное представление G компактно и является прямым слагаемым регулярного.**

Топология Фелла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\tilde{G}$ – множество классов эквивалентности унитарных представлений G, $\rho: G \longrightarrow U(H)$ – ее унитарное представление а $K \subset G$ какой-то компакт. Обозначим за $W(H, K, \varepsilon)$ все представления $\rho: G \longrightarrow U(H')$ такие, что для каких-то единичных векторов $v \in H, v' \in H'$, имеем $\sup_{g \in K} ||g(v) - v| - |v' - g(v')|| < \varepsilon$. Топология на $\tilde{G}$, заданная предбазой из всех $W(H, K, \varepsilon)$, называется **топология Фелла**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Эта топология нехаусдорфова.** Действительно, **каждое подпредставление $H_1 \subset H$ содержится в замыкании H.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Локально компактная группа G **обладает свойством Каждана (T)**, если любое представление G, в замыкании которого лежит тривиальное представление $\mathbb{I}_G$, содержит неподвижный вектор.

ТЕОРЕМА: **(Delorme-Guichardet)** Группа G обладает свойством Каждана (T) **тогда и только тогда, когда для любого действия G аффинными изометриями на гильбертовом пространстве H, G сохраняет какую-то точку $h \in H$.**

О связи дуального пространства группы...

Функциональный анализ и его приложения,
т. 1, вып. 1, 1967, 71—74.

О СВЯЗИ ДУАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ГРУППЫ СО СТРОЕНИЕМ ЕЕ ЗАМКНУТЫХ ПОДГРУПП

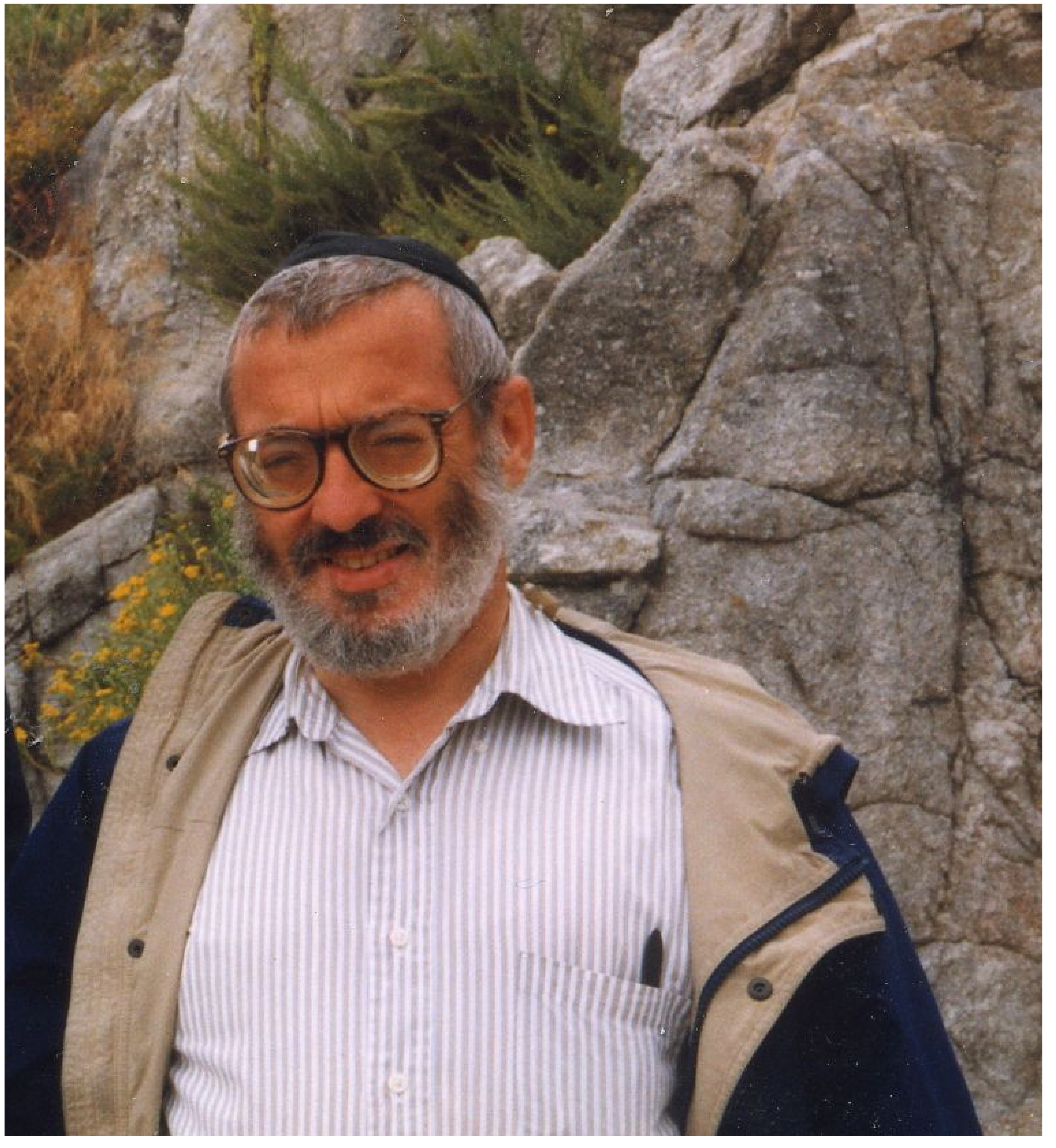
Д. А. Каждан

В статье исследуется строение дискретных подгрупп групп Ли (вещественных и p-адических) с конечным объемом фактор-пространства. В частности, доказывается, что если $\Gamma \subset G$ — дискретная подгруппа простой группы ранга*) больше двух такая, что объем фактор-пространства G / Γ конечен, то Γ имеет конечное число образующих и группа $\Gamma / [\Gamma, \Gamma]$ конечна. В случае вещественных чисел первая теорема дает положительный ответ на часть гипотезы Зигеля о конечности числа сторон фундаментального многоугольника. При этом используются сведения о строении дуального пространства группы Γ — пространства ее унитарных неприводимых представлений $\hat{\Gamma}$.

Статья состоит из трех пунктов. В п. 1 показывается, как строение $\hat{\Gamma}$ связано с обычными свойствами Γ. В п. 2 показано, как получать сведения о строении $\hat{\Gamma}$ из свойств $\hat{G}$. И, наконец, в п. 3 исследуется $\hat{G}$ в случае, когда G — группа Ли ранга больше двух.

1. Пусть G — локально компактная группа. *Дуальным пространством* группы G (обозначается $\hat{G}$) называется множество унитарных неприводимых

Д. А. Каждан



David Kazhdan
(р. 20 июня 1946)

Свойство (Т) для компактных групп

ТЕОРЕМА: Пусть G – компактная топологическая группа. Тогда G обладает свойством (Т).

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим множество $W(\mathbb{I}_G, G, \sqrt{2})$, где $\mathbb{I}_G$ обозначает тривиальное представление G. Неприводимое представление H содержится в этом множестве $\Leftrightarrow$ существует единичный вектор $v \in H$ такой, что $|g(v) - v| < \sqrt{2}$, иначе говоря, когда **угол между** v **и** $g(v)$ **меньше** $\pi/2$ для любого $g \in G$.

Шаг 2: Множество всех векторов $C_v := \left\{w \in H \quad | \quad \measuredangle(v, w) < \frac{\pi}{2}\right\}$ образует выпуклый конус с углом π у основания. Значит, **выпуклая оболочка любого подмножества C_v не содержит 0.**

Шаг 3: Рассмотрим операцию усреднения $\mathsf{Av}(v) := \frac{\int_G g(v)\mu}{\int_G \mu}$, где μ обозначает меру Хаара на G. Вектор $\mathsf{Av}(v)$ G-инвариантен, и лежит в выпуклой оболочке орбиты $G \cdot v$, которая лежит в C_v. **Следовательно, $\mathsf{Av}(v) \neq 0$.**

■

Группы со свойством (T) конечно порождены

ТЕОРЕМА: Пусть G – дискретная группа со свойством (T). **Тогда G конечно порождена.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Эта теорема – частный случай следующей. Мы называем **компактно порожденной группой** топологическую группу, которая мультипликативно порождена своим компактным подмножеством.

ТЕОРЕМА: Пусть G – локально компактная, σ-компактная группа со свойством (T). **Тогда G компактно порождена.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть M_i° – исчерпывающая G, монотонно возрастающая последовательность открытых множеств с компактными замыканиями M_i а G_i – порожденные M_i подгруппы. **Достаточно доказать, что для какого-то i, группа G_i имеет конечный индекс в G** (то есть что фактор-множество G/G_i конечно).

Группы со свойством (T) конечно порождены (2)

Доказательство. Шаг 1: Пусть M_i – исчерпывающая G, монотонно возрастающая последовательность открытых множеств с компактными замыканиями, такая, что $\overline{M}_i \subset M_{i+1}$, а G_i – порожденные M_i подгруппы. **Достаточно доказать, что фактор-множество G/G_i конечно**.

Шаг 2: Поскольку M_i открыты, группы G_i открыты. Значит, фактор-пространство G/G_i дискретно. Снабдим его мерой таким образом, что мера любой точки равна 1, и пусть R_i – пространство L^2-интегрируемых функций на G/G_i. **Группа G действует на G/G_i слева, превращая $R_i = L^2(G/G_i)$ в унитарное представление.**

Шаг 3: Поскольку последовательность M_i исчерпывающая ля каждого компакта $K \subset G$, K целиком лежит в каком-то $_N$. Значит, $g(v) = v$ для любого $v \in R_N$ и $g \in K$. Значит, R_N лежит в соответствующей окрестности из топологии Фелла: $R_N \in W(\mathbb{I}_G, K, \varepsilon)$. Мы получили, что $\mathbb{I}_G$ **лежит в замыкании R_N.**

Шаг 4: Для того, чтобы убедиться, что G не обладает свойством (T), **осталось доказать, что R_N не содержит инвариантных векторов** (Утверждение 1). Поскольку G транзитивно действует на бесконечном множестве G/G_N, G не может оставлять на месте никакую L^2-интегрируемую функцию. ■

Двойственность Понтрягина

Мы будем доказывать такую теорему:

ТЕОРЕМА: Локально компактная абелева группа G **обладает свойством (T) тогда и только тогда, когда она компактна.**

Ее весьма просто доказать для "разумных" абелевых групп, таких, как $\mathbb{Q}_p^m$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{Z}^l$ или их произведений. Для более экзотических ситуаций, нужна классификационная теорема, роль которой исполняет двойственность Понтрягина.

Пусть G – локально компактная абелева группа. Гомоморфизм $G \longrightarrow S^1$ называется **характером** G. Интерпретируя такие гомоморфизмы как 1-мерные унитарные представления G, мы можем снабдить группу $\hat G$ характеров топологией Фелла. Оно называется **группой, двойственной по Понтрягину** к G. Имеет место тавтологическое отображение $G \longrightarrow \hat{\hat G}$.

ТЕОРЕМА: ("Двойственность Понтрягина") Для каждой локально компактной абелевой группы G, двойственная по Понтрягину группа $\hat G$ тоже локально компактна. Более того, **тавтологическое отображение $G \longrightarrow \hat{\hat G}$ – изоморфизм.**

Множества Фельнера

ЛЕММА: Группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ не обладают свойством (Т).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть G – локально компактная группа, μ ее мера Хаара. **Фельнеровские подмножества** $F_i \subset G$ суть последовательность монотонно возрастающих подмножеств $F_i \subset G$ таких, что для любого $g \in G$, имеет место $\lim_i \frac{\mu(F_i \Delta g(F_i))}{\mu(F_i)} = 0$, где Δ обозначает симметрическую разность.

Легко видеть, что для $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ можно выбрать $F_i := [-i, i]$.

Пусть χ_i – характеристическая функция F_i, модифицированная в окрестности концов для непрерывности, а $v_i := \frac{\chi_i}{\sqrt{\int_G |\chi_i|^2 \mu}}$ соответствующий единичный вектор в регулярном представлении. В силу определения фельнеровских множеств, имеем $\lim_i |g(v_i) - v_i| = 0$, то есть $\mathbb{I}_\mathbb{Z}$ лежит в замыкании регулярного представления $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$. С другой стороны, для группы G с бесконечной мерой Хаара, никаких G-инвариантных векторов в $\mathcal{R}(G)$ нет **(проверьте это)**. ■

Свойство (Т) для абелевых групп

ТЕОРЕМА: Локально компактная абелева группа G **обладает свойством (Т) тогда и только тогда, когда она компактна.**

Доказательство. Шаг 1: Из свойства (Т) для группы G следует свойство (Т) для любых факторгрупп G/H (это тавтология).

Шаг 2: Пусть U – окрестность нуля, а G_U – порожденая ей группа. Поскольку G_U открыта в U, G/G_U дискретная группа. Поскольку G/G_U имеет свойство (Т), она конечно порождена. Бесконечную конечно порожденную дискретную абелеву группу можно сюрьективно спроектировать на $\mathbb{Z}$. Поскольку $\mathbb{Z}$ не имеет свойства (Т), то же верно и для G (Шаг 1). **Мы получили, что в локально компактной абелевой группе G со свойством (Т), G/G_U конечно для любой окрестности нуля $U \subset G$.**

Шаг 3: Рассмотрим гомоморфизм $\Psi: \ G \longrightarrow \prod_{U_i} G/G_{U_i}$, где U_i – все окрестности U. **Поскольку $\prod_{U_i} G/G_{U_i}$ компактно (как произведение компактов), ядро Ψ некомпактно.**

Свойство (Т) для абелевых групп

Шаг 3: Рассмотрим гомоморфизм $\Psi: \ G \longrightarrow \prod_{U_i} G/G_{U_i}$, где U_i – все окрестности U. **Поскольку $\prod_{U_i} G/G_{U_i}$ компактно (как произведение компактов), ядро Ψ некомпактно.**

Шаг 4: Пусть $\xi := \prod_\alpha \chi_\alpha: \ G \longrightarrow \prod_\alpha S^1$ – произведение всех характеров. В силу двойственности Понтрягина, ξ инъективно. Для каждой компактной окрестности $U \ni 0$, $\xi: \ U \longrightarrow \xi(U)$ – гомеоморфизм. Для ростка $\mathcal{G}$ группы в $\prod_\alpha \mathbb{R}$, связная компонента нуля есть пересечение всех ростков открытых подгрупп, содержащих $\mathcal{G}$. **Значит, $\ker \Psi$ – связная компонента G.**

Шаг 5: В силу того, что каждый нетривиальный характер на $\ker \Psi$ сюръективен, а характеры задают координаты на Ψ, это группа с делением. Поскольку она локально компактна, она (локально) изоморфна произведению нескольких копий $\mathbb{R}$. **Поскольку она некомпактна, у ней есть фактор, изоморфный $\mathbb{R}$.** Применяя шаг 1 и предыдущую лемму, получаем противоречие. ■

Свойство (T) и коммутант

СЛЕДСТВИЕ: Пусть G обладает свойством (T). **Тогда фактор G по замыканию коммутанта компактен.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Фактор по коммутанту – абелева группа со свойством (T), значит, она компактна. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Для дискретной группы это дает $H_1(G, \mathbb{Q}) = 0$: **первые гомологии и когомологии группы со свойством (T) зануляются.**

Группы, не обладающие свойством (Т)

ПРИМЕР: Некомпактные абелевы группы (см. выше).

ПРИМЕР: **Свободная группа не обладает свойством (Т).** В самом деле, для любого конечного подмножества K свободной группы $\mathbb{F}_r$ найдется представление $\mathbb{F}_r \longrightarrow U(H)$, такое, что все элементы K отвечают поворотам на углы $< \varepsilon$, для любых заданных K и ε.

ПРИМЕР: Группы $SL(2, \mathbb{R})$, $U(1, n)$, $SO(1, n)$, $SL(2, \mathbb{Z})$ не обладают свойством (Т). Это связано со следующей теоремой:

ТЕОРЕМА: Пусть группа G со свойством (Т) действует на комплексном или вещественном гиперболическом пространстве изометриями. **Тогда у G есть неподвижная точка.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Напомню, что **вещественное гиперболическое пространство** есть фактор $SO(1, n)/SO(n)$ с $SO(n)$-инвариантной римановой метрикой **(докажите, что она единственна с точностью до константы)**. **Комплексное гиперболическое пространство** есть фактор $U(1, n)/U(n)$ с $U(n)$-инвариантной римановой метрикой **(докажите, что она единственна с точностью до константы)**.

Свойство (T): применения и перспективы

Каждан доказывал с помощью свойства (T) конечную порожденность решеток в группах Ли (следующая лекция посвящена этому). В дальнейшем, у свойства (T) нашлось множество других применений и интерпретаций.

Б. Костант доказал, что группа $Sp(1, n, \mathbb{Z})$ обладает свойством (T). Эта группа **гиперболична по Громову**. Громов доказал, что каждая нециклическая группа, гиперболичная по Громову, допускает континуально много попарно неизоморфных факторгрупп, где все элементы имеют конечный порядок. Получаем следствие:

СЛЕДСТВИЕ: **Существует континуально много конечно-порожденных групп, обладающих свойством (T), где все элементы имеют конечный порядок.** В частности, **существуют дискретные группы, обладающие свойством (T), но не конечно-представимые** (они не получаются фактором свободной группы по конечному набору соотношений).

Свойство (T): применения и перспективы (2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi : G \longrightarrow U(H)$ – унитарное представление локально компактной группы G, $Z^1(G,\pi)$ – пространство непрерывных на компактах отображений $b : G \longrightarrow H$, удовлетворяющих $b(gg_1) = b(g) + \pi(g)(b(g_1))$, а $B^1(G,\pi)$ – подпространство в $Z^1(G,\pi)$, порожденное отображениями $b : G \longrightarrow H$ вида $b(g) = \pi(g)(v) - v$, где $v \in H$. **Пространство первых когомологий G с коэффициентами в H** есть $H^1(G,H) := \frac{Z^1(G,\pi)}{B^1(G,\pi)}$.

ТЕОРЕМА: **(Delorme-Guichardet)**
Локально компактная, σ-компактная группа **имеет свойство (T) тогда и только тогда, когда $H^1(G,H) = 0$** для любого унитарного представления H.

Используя когомологическую интерпретацию свойства (T), И. Шалом доказал, что $SL(n,R)$ **обладает свойством (T) для $n \geqslant m+2$, где m есть круллевская размерность кольца R.** В частности, $SL(n,\mathbb{Z}[x_1,...,x_l])$ обладает свойством (T) для $n \geqslant l+2$.

Основное применение свойства (T) нашло в информатике: с помощью групп со свойством (T) строятся графы экспандеры, имеющие колоссальное практическое значение ("Экспандеры Маргулиса").