- Изометрии $\mathbb{H}^n$ продолжаются на граничную сферу S^{n-1}
- Отображение сужения инъективно
- Образ называется группой Мёбиусовых преобразований

$$Isom(\mathbb{H}^n) \to Mob(S^{n-1}) < Homeo(S^{n-1})$$

Лекция 2: Клейновы группы

Любая стандартная топология на группе

$$G = Isom(\mathbb{H}^n)$$

например топология поточечной сходимости,

равномерной сходимости на компактах и так далее. Они все эквивалентны.

Определение. Подгруппа $\Gamma < G$ называется **Клейновой** если она дискретна как подмножество.

Определение. Клейнова группа Γ называется *элементарной* если она либо имеет неподвижную точку в замкнутом шаре $\overline{\mathbb{B}}^n$ либо имеет инвариантное двухточечное подмножество в S^{n-1}.

Эквивалентно, Γ содержит подгруппу конечного индекса $\cong \mathbb{Z}^k, k \leq n-1.$

Алгебраические ограничения на Клейновы группы (как на абстрактные группы):

1. Γ *почти коммутационно транзитивна:*

$$[\alpha, \beta] = [\beta, \gamma] = 1, o(\beta) = \infty \Rightarrow [\alpha^i, \gamma^j] = 1$$

В частности, Клейнова группа не может содержать подгруппу $(\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$.

2. Γ *аменабельна* $\iff$ Γ не содержит неабелевых свободных подгрупп $\iff$ Γ элементарна

3. Γ обладает свойством T $\iff$ $|\Gamma| < \infty$.

4. Γ проста $\Rightarrow |\Gamma| < \infty$.

5. Γ *Кэлерова* группа $\Rightarrow$ (почти) фундаментальная группа поверхности или абелева.

Откуда происходит (3):

Теорема (Haagerup**)** Группа $G = Isom(\mathbb{H}^n)$

допускает изометрическое *метрически собственное*

действие на некотором Гильбертовом пространстве H:

$$d_{\mathbb{H}^n}(x, \gamma_i x) \to \infty \Rightarrow ||\gamma_i(0)|| \to \infty.$$

Поэтому, бесконечная дискретная подгруппа

$\Gamma < Isom(\mathbb{H}^n)$ не может фиксировать точку в H.

А значит что она не имеет свойства T.

Определение. Подгруппа $\Gamma < Homeo(X)$ действует на X *собственно разрывно* если для всякого компакта $C \subset X$ подмножество $\{\gamma \in \Gamma : \gamma C \cap C \neq \emptyset\} \subset \Gamma$ конечно.

Упражнение. Подгруппа $\Gamma < G = Isom(\mathbf{H}^n)$ Клейнова тогда и только тогда когда она действует собственно разрывно на гиперболическом пространстве.

Замечание. Любой эллиптический элемент Клейновой группы имеет конечный порядок.

Определение. *Предельное множество* $\Lambda(\Gamma) \subset S^{n-1}$ Клейновой группы это множество точек накопления (любой) её орбиты $\Gamma x = \{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}, x \in \mathbb{H}^n$.

Определение. *Множество разрывности* группы Γ

$\Omega(\Gamma) = S^{n-1} - \Lambda(\Gamma).$

Упражнение. $\Lambda(\Gamma)$ равно множеству

$$\{\alpha : \exists \alpha_\omega \in cl_{QC}(\Gamma)\} = \{\omega : \exists \alpha_\omega \in cl_{QC}(\Gamma)\}$$

здесь как и раньше QC обозначает множество квазипостоянных отображений.

Лемма. Γ действует собственно разрывно на

$$\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)$$

Возникает хаусдорфово фактор-пространство

$M(\Gamma) = (\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)/\,\Gamma$ — *орбифолд*, а если Γ без кручения, то гладкое многообразие (с краем).

Определение. Клейнова группа *кокомпактна* если фактор-пространство $\mathbb{H}^n/\Gamma$ компактно.

Определение. Предельная точка λ называется *конической* если существует последовательность $\gamma_i \in \Gamma$ такая что $\gamma_i(x) \to \lambda$ "конически", т.е. $d(\gamma_i(x), L) \leq Const$

где L это геодезический луч в $\mathbb{H}^n$ с концом в λ

Лемма. Если группа Γ кокомпактна то все точки S^{n-1} конические предельные.

Доказательство. Существует R такое что $\Gamma B(x, R) = \mathbb{H}^n$. Поэтому для каждого $L(i), i \in \mathbb{N}$, найдётся $\gamma_i \in \Gamma, d(\gamma_i(x), L(i)) \leq R$. Поэтому $\gamma_i(x) \to \lambda$ конически.

Пример 1. γ параболическая изометрия с неподвижной точкой $\lambda \in S^{n-1}$. Тогда $\Lambda(\langle\gamma\rangle) = \{\lambda\}$.

Предельная точка λ не коническая.

Пример 2. γ гиперболическая изометрия с неподвижными точками λ_1, λ_2. Тогда $\Lambda(\langle\gamma\rangle) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Обе предельные точки конические.

Замечание. Предельная точка может быть и не параболической неподвижной, но и не конической.

Теорема жесткости.

Тривиальная деформация Клейновой группы это изоморфизм $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ который можно индуцировать сопряжением: существует

$$\alpha \in Isom(\mathbb{H}^n), \quad \rho(\gamma) = \alpha\gamma\alpha^{-1}, \forall\gamma \in \Gamma_1$$

С топологической точки зрения в этих примерах гомотопическая эквивалентность $\mathbb{H}^n/\Gamma_1 \to \mathbb{H}^n/\Gamma_2$

индуцированна изометрией.

Примеры **нетривиальных** деформаций.

1. Циклические гиперболические группы

$$\Gamma_i = \langle \gamma_i \rangle, \tau_{\gamma_1} \neq \tau_{\gamma_2}.$$

2. Параболические группы (абелевы ранга >1).

3. Подгруппы $\Gamma < Isom(\mathbb{H}^2)$.

Если Γ кокомпактна с фактором рода p
то у этой группы есть семейство нетривиальных деформаций размерности $6p-6$.

4. Свободные дискретные подгруппы $\Gamma < Isom(\mathbb{H}^n)$.

5. Как правило (**но не всегда**!) $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma$
нежесткая, т.е. допускает нетривиальные деформации.

Теорема жесткости. (G.D.Mostow) $n \geq 3.$
Если $Vol(\mathbb{H}^n/\Gamma_1) < \infty,$ то изоморфизм
$\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ индуцирован сопряжением.

Я расскажу доказательство в случае кокомпактных групп Γ_1 без кручения.

Шаг 1. (Whitehead) $M_i = \mathbb{H}^n/\Gamma_i, \exists f : M_1 \to M_2$
— гомотопическая эквивалентность индуцирующая изоморфизм $\rho : \pi_1(M_1) \to \pi_1(M_2).$

$H_n(M_1, \mathbb{Z}/2) \neq 0 \Rightarrow H_n(M_2, \mathbb{Z}/2) \neq 0 \Rightarrow M_2$ компактно.

Отображение f и гомот. обратное $\bar{f}$ можно считать гладким и, по компактности, L-Липшицевым.

Шаг 2. Длины следов гомотопий

$$\bar{f} \circ f \cong id : M_1 \to M_1, f \circ \bar{f} \cong id : M_2 \to M_2$$

равномерно ограничены, $\leq A.$

Поэтому тоже самое верно и для поднятий в универсальное накрытие

1. $\bar{F} \circ F \cong id : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n, F \circ \bar{F} \cong id : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$

2. $d(\bar{F} \circ F, id) \leq A, \quad d(F \circ \bar{F}, id) \leq A$

3. $d(\bar{F}(x), \bar{F}(y)) \leq Ld(x, y), \quad d(F(x), F(y)) \leq Ld(x, y)$

(так как $f, \bar{f}$ были L-Липшицевыми).

4. $F \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ F, \gamma \in \Gamma_1$ (эквивариантность)

5. Следствие 2 и 3:

$$L^{-1}d(x,y) - L^{-1}\cdot 2A \le d(F(x),F(y)) \le Ld(x,y).$$

То же самое и для отображения $\bar{F}$.

— Отображение F является **псевдоизометрией** с **псевдообратным** отображением $\bar{F}$.

Шаг 3. Morse, Ефремович-Тихомирова, Mostow

Теорема. Любая псевдоизометрия F непрерывно продолжается на граничную сферу, до квазиконформного гомеоморфизма

$$F_\infty : S^{n-1} \to S^{n-1}$$

(По непрерывности, эквивариантность сохраняется.)

Квазиконформное отображение $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

это гомеоморфизм отображающий бесконечно

малые сферы в бесконечно малые эллипсоиды

эксцентричности $\leq K.$

$$\limsup_{r \to 0} \sup_{|x-y|=|x-z|=r} \frac{|h(x)-h(y)|}{|h(x)-h(z)|} \leq K.$$

Замечание. h конформен тогда и только тогда когда

$$K = 1$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n, n \neq 1.$ (Gehring)

Шаг 4. Аналитические свойства квазиконформных отображений.

1. (Rademacher, Степанов, Gehring)

Теорема. Квазиконформные отображения почти всюду дифференцируемы.

Заметим что это верно и в размерности 1:

(Borel) Любой гомеоморфизм $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируем почти всюду.

2. (Väisälä) **Теорема**. Если $n \geq 2$ то для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ производная $Dh(x)$ обратима.

Вот это свойство и не верно для $n = 1$ что соответствует отсутствию жесткости в $\mathbb{H}^2$.

Интересно что Мостов все эти аналитические факты доказал сам, не зная о работах аналитиков.

А потом он сделал то о чём аналитики и не думали: Обобщил квазиконформную теорию на случай границ других гиперболических пространств, например единичного комплексного шара.

Шаг 5: *Что такое производная?*

На этом шагу Мостов использовал эргодическую теорию, чего мы делать не будем.

Идея с производной похоже принадлежит Громову.

Теорема. Пусть для кокомпактных Клейновых групп $\Gamma_1, \Gamma_2 < Isom(\mathbb{H}^n), n \geq 2,$ есть изоморфизм $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ и эквивариантный квазиконформный гомеоморфизм

$$h : S^{n-1} \to S^{n-1}, \rho(\gamma) = h\gamma h^{-1},$$

Тогда $h \in Isom(\mathbb{H}^n).$

Заметим что достаточно доказать конформность h a.e.

Доказательство. Сопрягая группы Γ_1, Γ_2 можно считать что: $h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}, \lambda = 0, h(0) = 0 \quad (h(\infty) = \infty))$

Тогда: $Dh(0) = A \in GL(n-1, \mathbb{R}),$

$$Ax = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} h(tx)$$

Ключ к доказательству состоит в том что умножение на t и деление на t это преобразования Мёбиуса, т.е. сужения гиперболических изометрий. Умножение на t вряд ли лежит в группе Γ_1 но зато, поскольку 0 это предельная точка Γ_1 существуют $\gamma_i \in \Gamma_1, \gamma_i(\mathbf{e}_n) \to 0,$ $d(\gamma_i(\mathbf{e}_n), L) \leq C,$ где $L = \mathbb{R}_+ \mathbf{e}_n.$ Поэтому $\exists t_i \to 0+,$ $d(t_i^{-1} \gamma_i(\mathbf{e}_n), \mathbf{e}_n) \leq C.$

Поэтому для $T_i(x) := t_i x, T_i \in Isom(\mathbb{H}^n)$

последовательность $k_i := \gamma_i^{-1} \circ T_i$ предкомпактна и

можно считать что сходится к $k \in Isom(\mathbb{H}^n)$.

Последовательность квазиконформных отображений

$$h_i(x) := t_i^{-1} h(t_i x) = T_i^{-1} \circ h \circ T_i(x), x \in \mathbb{R}^n$$

как мы знаем (из определения производной!) сходится

к обратимому линейному отображению А.

По построению, гомеоморфизмы h_i сопрягают группу

$G_i := T_i^{-1} \Gamma_1 T_i$ в подгруппу

$$G_i' := T_i \Gamma_2 T_i^{-1} < Isom(\mathbb{H}^n)$$

(так как $\Gamma_2 = h \Gamma_1 h^{-1}$).

Вспоминая что $T_i = \gamma_i k_i$ получаем:

$$G_i = T_i^{-1}\Gamma_1 T_i = (k_i^{-1}\gamma_i^{-1})\Gamma_1(\gamma_i k_i) = k_i^{-1}\Gamma_1 k_i.$$

Так что последовательность Клейновых групп G_i “сходится” к Клейновой группе $G_\infty = k^{-1}\Gamma_1 k.$

Поскольку $h_i \to A$ и $h_i G_i h_i^{-1} < Isom(\mathbb{H}^n)$ то и $AG_\infty A^{-1} < Isom(\mathbb{H}^n).$

Заметим что будучи сопряжена группе Γ_1, группа G_∞ тоже неэлементарна.

Лемма. Если группа $\Gamma < Isom(\mathbb{H}^n)$ неэлементарна и $A \in GL(n-1, \mathbb{R})$ сопрягает Γ в подгруппу $Isom(\mathbb{H}^n)$, то $A \in \mathbb{R} \cdot O(n-1) < Isom(\mathbb{H}^n).$

Доказательство. Поскольку группа Γ неэлементарна

то найдется $\gamma \in \Gamma, \gamma(\infty) \neq \infty, \gamma(\infty) \neq 0.$

Рассмотрим линейную гиперплоскость $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$

$$A\gamma^{-1}(\infty) \notin P.$$

Тогда $\gamma \circ A^{-1}(\overline{P})$ не содержит точки ∞ а потому

будет круглой сферой S. Поэтому либо A(S) не будет

круглой сферой, либо $A \in \mathbb{R} \cdot O(n-1)$. Однако,

$\alpha = A\gamma A^{-1} \in Isom(\mathbb{H}^n)$ и потому

$$A(S) = A\gamma A^{-1}(\overline{P}) = \alpha(\overline{P})$$

а значит $A \in \mathbb{R} \cdot O(n-1).$

Теперь доказательство теоремы Мостова можно и закончить: Мы видим что квазиконформное отображение h конформно почти во всех точках, а значит оно Мёбиусово. Поэтому изоморфизм $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ индуцирован изометрией $\mathbb{H}^n$. QED!

Аналогично можно доказать (теорему на следующей странице):

Теорема. (Tukia, Agard) Пусть для неэлементарных Клейновых групп $\Gamma_1, \Gamma_2 < Isom(\mathbb{H}^n), n \geq 2,$ есть изоморфизм $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ и эквивариантный гомеоморфизм $h : S^{n-1} \to S^{n-1}, \rho(\gamma) = h\gamma h^{-1},$

дифференцируемый в одной конической предельной

точке с обратимой производной.

Тогда ρ индуцирован изометрией

$$\alpha \in Isom(\mathbb{H}^n) : \rho(\gamma) = \alpha\gamma\alpha^{-1}.$$