

РЕЗУЛЬТАТЫ И ЗАДАЧИ НА СТЫКЕ ВЫПУКЛОЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этом небольшом курсе лекций мы рассмотрим некоторые классические задачи выпуклой и дискретной геометрии с точки зрения симплектической геометрии. Одним из важных инструментов в таком подходе является связь между замкнутыми бильярдными траекториями в выпуклых телах (при этом длина меряется с помощью финслеровой нормы) и не так давно открытыми замечательными инвариантами – симплектическими ёмкостями.

Для понимания этого курса будет достаточно стандартных сведений из университетского курса математики, основные понятия симплектической геометрии мы быстро повторим. Также сделаем небольшой обзор по гамильтоновым симплектоморфизмам и симплектическим ёмкостям, которые берут своё начало от теоремы Громова «о несжимаемости».

Потом мы вернёмся к элементарным геометрическим соображениям и обсудим характеризацию замкнутой бильярдной траектории в выпуклом теле, имеющей минимальную длину. Наличие такого результата позволяет считать эти минимальные длины и, следовательно, находить симплектические ёмкости некоторых выпуклых тел в $\mathbb{R}^{2n}$ специального вида. Это уже полезно, так как нахождение симплектических ёмкостей выпуклых тел непросто, если тело не является эллипсоидом и примеров таких вычислений немного. Далее, мы увидим, что эти рассуждения позволяют свести старую гипотезу Малера про объёмы n -мерного центрально симметричного выпуклого тела K и его полярного K° ,

$$\text{vol } K \cdot \text{vol } K^\circ \geq \frac{4^n}{n!}$$

к гипотезе Витербо из симплектической геометрии, предположительно оценивающей объём выпуклого тела $X \subset \mathbb{R}^{2n}$ снизу через его ёмкость как $\frac{c(X)^n}{n!}$. Конечно, подходы к гипотезе Витербо пока не вполне ясны (но мы обсудим некоторые идеи), но это единственное известное на данный момент направление, которое может привести к доказательству гипотезы Малера в исходном виде (гипотеза Малера с точностью до экспоненциального по n множителя известна и называется «теорема Бургена–Мильмана»).

Также мы обсудим возможное применение симплектических методов в другой старой задаче – задаче Тарского–Банга. Один из сильных результатов по этой теме звучит так: если единичный шар нормированного пространства покрыт «полосками» (областями между парами параллельных гиперплоскостей), то сумма ширин полосок (в данной норме) не менее 2. Это доказал Кит Болл в 1991 году, однако его доказательство довольно технично и совсем не геометрично. Симплектический подход и неравенство между ёмкостью и «энергией смещения» (мы обсудим эти понятия подробно) позволяют установить частные случаи этого (и некоторых похожих) утверждений, а также приводят к естественной гипотезе о «субаддитивности» симплектических ёмкостей на выпуклых телах, интересной самой по себе.

Возможно мы обсудим и некоторые другие вопросы рядом с указанной темой, которые являются не такими трудными, как уже упомянутые. Курс основан в основном на недавних публикациях, которые приведены ниже.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A.V. Akopyan, A.M. Balitskiy, R.N. Karasev, A.V. Sharipova. Elementary results in non-reflexive Finsler billiards. *Arxiv preprint arXiv:1401.0442* (2014).
- [2] A.V. Akopyan, R.N. Karasev, F.V. Petrov. Bang’s problem and symplectic invariants. *Arxiv preprint arXiv:1404.0871* (2014).
- [3] S. Artstein-Avidan, Y. Ostrover. Bounds for Minkowski billiard trajectories in convex bodies. *Intern. Math. Res. Not.* (2012); also available at arXiv:1111.2353.
- [4] S. Artstein-Avidan, R. Karasev, Y. Ostrover. From symplectic measurements to the Mahler conjecture. *Arxiv preprint arXiv:1303.4197* (2013).
- [5] R.N. Karasev. Covering dimension using toric varieties. *Arxiv preprint arXiv:1307.3437* (2013).