1. Факты из симплектической геометрии

1.1. Пусть $A = (a_{ij})$ – кососимметрическая матрица. Докажите, что её собственные значения мнимые, а детерминант неотрицателен.

Далее в $\mathbb{R}^{2n}$ координаты обозначаем буквами $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots p_n$ и фиксируем симплектическую форму

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Наборы $(q_1, \dots, q_n)$ и $(p_1, \dots, p_n)$ по отдельности обозначаем как $\bar{q}$ и $\bar{p}$.

1.2. Докажите, что все кососимметричные невырожденные билинейные формы в некотором базисе выглядят как ω.

Линейное преобразование $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ назовём симплектическим, если оно сохраняет форму ω.

1.3. Докажите, что всякое симплектическое линейное преобразование $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ можно представить в виде композиции $S = UP$, где U унитарное (в смысле отождествления $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$), а P — симплектическое, симметричное и положительно определённое (в смысле стандартного скалярного произведения на $\mathbb{R}^{2n}$).

1.4. Докажите, что всякое линейное симплектическое преобразование $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ представляется в виде композиции двух, имеющих квадратичную производящую функцию. Последнее означает, что для некоторой квадратичной функции $S(\bar{q}', \bar{q}'')$ преобразование выводится из соотношений

$$\bar{p}'' = -\frac{\partial S(\bar{q}', \bar{q}'')}{\partial \bar{q}''}, \quad \bar{p}' = \frac{\partial S(\bar{q}', \bar{q}'')}{\partial \bar{q}'}$$

между $(\bar{q}', \bar{p}'), (\bar{q}'', \bar{p}'')$.

1.5. * Что можно сказать в предыдущей задаче про не обязательно линейные симплектоморфизмы?

1.6. Докажите, что всякую квадратичную форму $f(\bar{q}, \bar{p})$ можно привести линейным симплектическим преобразованием к виду

$$f(\bar{q}, \bar{p}) = \sum_{i=1}^{n} a_i (p_i^2 + q_i^2).$$

1.7. Докажите, что набор чисел $\{a_i\}$ (с кратностями) является инвариантом квадратичной формы относительно симплектических преобразований.

Для эллипсоида $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ с центром в начале координат можно рассмотреть его квадратичное уравнение $f(\bar{q}, \bar{p}) \le 1$ и среди инвариантов $\{a_i\}$ формы f можно выбрать максимальный a_{max}. Тогда обозначим $c(E) = \frac{\pi}{a_{max}}$.

1.8. Докажите, что если линейное симплектическое отображение S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в $\mathbb{R}^{2n}$, то $c(E') \le c(E'')$.

Предыдущее упражнение можно решить элементарно, а следующее можно вывести из теоремы Громова о несжимаемости (будет рассказана у доски):

1.9. Докажите, что если симплектоморфизм S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в $\mathbb{R}^{2n}$, то $c(E') \le c(E'')$.

И ещё аналогичные упражнения:

1.10. Упорядочив числа $\{a_i\}$ по убыванию, можно ввести семейство инвариантов эллипсоида по формуле

$$c_k(E) = \frac{\pi}{a_k}$$

для $k = 1, \dots, n$. Докажите, что если линейное симплектическое отображение S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в $\mathbb{R}^{2n}$, то $c_k(E') \le c_k(E'')$.

1.11. * Докажите, что если разрешить нелинейные симплектоморфизмы, то предыдущее утверждение перестанет быть верным.

2. Выпуклая геометрия и бильярды

Для выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$, содержащего начало координат внутри себя, *полярное тело* задаётся неравенствами:

$$K^\circ = \bigcap_{q \in K} \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, q \rangle \le 1\}.$$

Если мы хотим различать пространство $\mathbb{R}^n$ и его двойственное, то мы будем обозначать их V и V^*. Для нормы $\|\cdot\|$ на V двойственная норма $\|\cdot\|_*$ на V^* определяется как

$$\|p\|_* = \sup_{q : \|q\| \le 1} \langle p, q \rangle.$$

Их единичные шары $\{\|q\| \le 1\}$ и $\{\|p\|_* \le 1\}$ полярны друг к другу.

2.1. Докажите последнее утверждение.

2.2. Докажите формулу для объёма единичного шара евклидовой нормы в $\mathbb{R}^n$

$$v_n = \operatorname{vol} B^n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}.$$

Что такое факториал полуцелого числа?

2.3. Докажите неравенство Бляшке–Сантало для центрально-симметричных выпуклых тел:

$$\operatorname{vol} K \cdot \operatorname{vol} K^\circ \le v_n^2.$$

Начните с плоского случая $n = 2$.

2.4. Как правильно сформулировать неравенство Бляшке–Сантало для тел, не являющихся центрально симметричными?

2.5. Проверьте формулу

$$\operatorname{vol} K \cdot \operatorname{vol} K^\circ = \frac{4^n}{n!}$$

для случая, когда $K = [-1, 1]^n$ – стандартный куб в $\mathbb{R}^n$.

2.6. Придумайте центрально симметричные выпуклые многогранники, отличные от куба и его полярного тела (кросcполитопа), и отличные от их аффинных образов, для которых выполняется равенство из предыдущего упражнения.

2.7. ** Докажите для какой-нибудь положительной константы γ и всякого n-мерного центрально-симметричного выпуклого тела K неравенство

$$\operatorname{vol} K \cdot \operatorname{vol} K^\circ \ge \frac{\gamma^n}{n!}.$$

В следующих упражнениях рассматриваются бильярды в выпуклом теле, заданные с помощью евклидовой нормы. Правило отражения в этом случае говорит, что единичный вектор скорости меняется при ударе на вектор, кратный нормали в точке удара.

2.8. Докажите правило отражения с помощью метода множителей Лагранжа. Если это надо доказать, то что надо считать определением бильярдной траектории?

2.9. Докажите, что в гладком выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^2$ найдётся не менее $\varphi(n)$ разных замкнутых бильярдных траекторий с n ударениями на период. Здесь $\varphi(n)$ – функция Эйлера.

2.10. * Докажите, что в гладком выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся не менее n разных замкнутых бильярдных траекторий с двумя ударениями на период. Такие траектории называются *двойными нормалями* тела K.

Шириной тела K называется минимум выражения

$$\max_{q \in K} \langle p, q \rangle - \min_{q \in K} \langle p, q \rangle$$

по всем линейным формам p с $\|p\|_* = 1$. Мы пока продолжаем работать с евклидовой нормой (тогда обозначаем ширину $w_B(K)$), но определение приведено для произвольного случая.

Пусть $\xi_B(K)$ (для гладкого тела K с евклидовой нормой) – минимальная длина замкнутой бильярдной траектории в теле K.

2.11. Докажите, что ширина разностного тела $K - K = \{q' - q'' : q', q'' \in K\}$ равна удвоенной ширине тела K (в произвольной норме).

2.12. Докажите, что для гладкого тела K на плоскости

$$\xi_B(K) \geq \sqrt{3} w_B(K).$$

Далее мы рассматриваем пару выпуклых тел $K \subset V$ и $T \subset V^*$, содержащих начало координат, обозначаем при этом $n = \dim V = \dim V^*$. На пространстве V мы будем пользоваться нормой с двойственным единичным шаром T и обозначать её $\|\cdot\|_T$ [1], а на пространстве V^* будем пользоваться нормой с двойственным единичным шаром K.

Если оба тела K и T – гладкие, то минимальную длину замкнутой бильярдной траектории в K (при измерении длин нормой $\|\cdot\|_T$) мы обозначим $\xi_T(K)$.

2.13. В данном случае бильярдную траекторию можно определить как критическую точку функционала $\|\cdot\|_T$-длины ломаной с концами на границе K. Получите правило отражения для таких бильярдных траекторий в помощью метода множителей Лагранжа.

Известно (будет прокомментировано у доски), что число $\xi_T(K)$ равно симплектической ёмкости Хофера–Цендера (или первой ёмкости Экеланда–Хофера) произведения $K \times T$.

2.14. Как инвариантно определена симплектическая структура на $V \times V^*$? Напишите формулу.

Доказательства следующих фактов данного раздела будут рассказаны у доски, но желающие могут порешать их самостоятельно:

2.15. Докажите характеризацию величины $\xi_T(K)$ по Бездеку–Бездеку:

$$\xi_T(K) = \min_{2\leq m\leq n+1} \min_{P\in\mathcal{P}_m(K)} \ell_T(P),$$

где

$$\mathcal{P}_m(K) = \{(q_1,\dots,q_m) : \{q_1,\dots,q_m\} \text{ не помещается в } \alpha K + t \text{ при } \alpha\in(0,1),\ t\in V\}.$$

2.16. * Докажите свойства величины $\xi_T(K)$:
(монотонность) если $K' \subseteq K''$, то $\xi_T(K') \leq \xi_T(K'')$;
(симметричность) $\xi_T(K) = \xi_K(T)$;
(неравенство типа Брунна–Минковского) $\xi_T(K' + K'') \geq \xi_T(K') + \xi_T(K'')$.

2.17. Докажите для центрально симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\xi_{K^\circ}(K) \geq 4.$$

2.18. Докажите для не обязательно центрально симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\xi_{K^\circ}(K) \geq 2 + 2/n.$$

2.19. Докажите для не обязательно центрально симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\xi_{(K-K)^\circ}(K) \geq 1 + 1/n,$$

здесь $K - K = \{q' - q'' : q', q'' \in K\}$ – разностное тело тела K.

2.20. (Открытая задача) Какое неулучшаемое неравенство в зависимости от n можно написать для $\xi_{K^\circ - K^\circ}(K)$?

[1] Внимание, это не вполне стандартное обозначение!

3. Задача Тарского–Банга о покрытии полосками и прочее

Полоской в $V = \mathbb{R}^n$ назовём множество, задаваемое неравенствами (относительно q при фиксированном p) $a \le \langle p, q\rangle \le b$. Как нетрудно убедиться, ширина полоски в некоторой норме $\|\cdot\|$ равна $\frac{b-a}{\|p\|_*}$ (здесь двойственная норма).

Начнём со случая евклидовой нормы:

3.1. Докажите, в размерности 2 и 3, что евклидов единичный шар нельзя покрыть конечным набором полосок с суммой ширин меньше 2. Подсказка: воспользуйтесь формулой площади поверхности шарового слоя.

3.2. * Докажите то же самое в произвольной размерности.

3.3. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дан единичный шар и ещё дана $m-1$ гиперплоскость. Докажите, что в исходный шар можно поместить шар радиуса $1/m$, который не будет пересекать данные гиперплоскости своей внутренностью.

3.4. Пусть единичный квадрат на плоскости разбит на части, которые после движений также дают разбиение тонкого прямоугольника $m \times 1/m$ (это называется равносоставленность). Части не предполагаются выпуклыми, или даже измеримыми. Докажите, что количество частей должно быть не менее m.

3.5. * (Теорема Банга) Докажите, что если тело $K \subset \mathbb{R}^n$ имеет ширину 1, то сумма ширин конечного набора покрывающих его полосок не менее 1.

Определим *обобщённый радиус вписанного шара* для выпуклых тел $K, L \subset \mathbb{R}^n$ как

$$r_L(K) = \sup\{s \ge 0 : \exists t \in \mathbb{R}^n : sL + t \subseteq K\}.$$

Если $L = B$ (евклидов шар), то это просто радиус максимального вписанного шара.

3.6. * (Теорема Владимира Кадеца) Докажите, что если евклидов шар $B \subset \mathbb{R}^n$ покрыт набором выпуклых тел C_i, то для суммы радиусов их вписанных шаров выполняется

$$\sum_i r_B(C_i) \ge 1.$$

3.7. * Докажите, что если плоское выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^2$ разрезано на выпуклые части $\{C_i\}$, то

$$\sum_i r_K(C_i) \ge 1.$$

Если в предыдущем упражнении заменить «разрезано на выпуклые части» на «покрыто выпуклыми множествами», то получается открытая задача. Далее рассматриваем произвольную норму.

3.8. ** (Теорема Болла) Докажите, что если K – единичный шар нормы $\|\cdot\|$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, то для всякого конечного набора полосок $\{P_i\}$, покрывающего K, получается

$$\sum_i w_{\|\cdot\|}(P_i) \ge 2.$$

3.9. Докажите предыдущее утверждение для случая, когда $K = [-1, 1]^2$.

3.10. (Открытая задача – двумерная гипотеза Банга) Докажите, что если K – выпуклое тело на плоскости $\mathbb{R}^2$, а норма $\|\cdot\|$ имеет единичный шар $K - K$, то для всякого конечного набора полосок $\{P_i\}$, покрывающего K, получается

$$\sum_i w_{\|\cdot\|}(P_i) \ge 1.$$

3.11. * Докажите гипотезу Банга для случая, когда полоски идут только в двух направлениях.

Ну и разные задачи по близким темам:

3.12. (Теорема Минковского) Пусть K – центрально симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ объёма не менее 2^n. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

3.13. * Пусть K – выпуклое тело на плоскости, содержащее начало координат и для полярного тела пусть $\operatorname{vol} K^\circ \le 3/2$. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

3.14. (Открытая задача) Пусть K – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат и для полярного тела пусть $\operatorname{vol} K^\circ \le \frac{n+1}{n!}$. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

Рекомендованная литература по курсу

[1] A.V. Akopyan, A.M. Balitskiy, R.N. Karasev, A.V. Sharipova. Elementary results in non-reflexive Finsler billiards. *Arxiv preprint arXiv:1401.0442* (2014).

[2] A.V. Akopyan, R.N. Karasev, F.V. Petrov. Bang's problem and symplectic invariants. *Arxiv preprint arXiv:1404.0871* (2014).

[3] J.C. Álvarez Paiva, F. Balacheff. Contact geometry and isosystolic inequalities. *Geometric and Functional Analysis* 24:2 (2014), 648–669; also available at arXiv:1109.4253.

[4] J.C. Álvarez Paiva, F. Balacheff, K. Tzanev. Isosystolic inequalities for optical hypersurfaces. *Arxiv preprint arXiv:1308.5522* (2013).

[5] S. Artstein-Avidan, Y. Ostrover. Bounds for Minkowski billiard trajectories in convex bodies. *Intern. Math. Res. Not.* (2012); also available at arXiv:1111.2353.

[6] S. Artstein-Avidan, R.N. Karasev, Y. Ostrover. From symplectic measurements to the Mahler conjecture. *Arxiv preprint arXiv:1303.4197* (2013); accepted at Duke Math. Journal.

[7] H. Hofer, E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics.* Birkhäuser, 1994.

[8] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[9] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.* 82:2 (1985), 307–347.

[10] M. Gromov. Convex sets and Kähler manifolds. *IHES*, www.ihes.fr/ gromov/PDF/[68].pdf, 1990.