J.-L. Colliot-Thélène (CNRS et Université Paris-Sud)

Группа Брауэра и препятствие Брауэра-Манина

Летняя школа в Ярославле

25 – 31 июля 2012

Сравнения, локальные кольца

Пусть $f(x_1, \cdots, x_n)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Проблема: найти методы, которые определяют, разрешимо ли уравнение

$$f(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

в целых числах.

Если f – однородный многочлен, нас интересуют примитивные решения (взаимно простые целые числа $x_i, i = 1, \ldots, n$: Н.О.Д.$(x_i)_i = 1$).

Иногда легко показать, что решений нет.
Например, у уравнения $x^2 + y^2 + 1 = 0$ нет решений в $\mathbb{R}$, а, значит, и в $\mathbb{Z}$.
Можно также использовать сравнения, чтобы доказать, что решений нет.
Например, уравнение $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ не имеет нетривиальных решений (сравнения по модулю 9, можно также использовать сравнения по модулю 4).
Пусть p – простое число. Используя сравнения по модулю p^3, можно показать, что уравнение

$$x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$$

не имеет нетривиальных решений.

Локально-глобальная проблема: если сравнения по модулю m выполняются для любого m (и если есть решения в $\mathbb{R}$), есть ли целые решения ?

Проблема аппроксимации : Если все сравнения выполняются (и есть действительные решения), и если заданы целое число $m > 0$ и $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, такие, что

$$f(b_1, \cdots, b_n) = 0 \ \ mod \ m,$$

существуют ли $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, сравнимые с $(b_1, \dots, b_n)$ по модулю m, такие, что

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \ ?$$

Локальные кольца были изобретены Куртом Гензелем (Kurt Hensel). Каждому простому числу p ставится в соотвествие целостное кольцо $\mathbb{Z}_p$, поле частных $\mathbb{Q}_p$ которого является пополнением $\mathbb{Q}$ по p-адической метрике

$$|p^n \cdot a/b|_p = 1/p^n$$

($a, b \in \mathbb{Z}$, a и b взаимно просты с p.)
Уравнение $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ с целыми коэффициентами имеет (примитивное) решение в $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда оно имеет (примитивное) решение по модулю произвольной степени p.

Пусть $X(R)$ – множество решений уравнения $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ в коммутативном кольце R. Включения

$$X(\mathbb{Z}) \subset \prod_p X(\mathbb{Z}_p) \subset X(A_{\mathbb{Q}})$$

$$X(\mathbb{Q}) \subset X(A_{\mathbb{Q}}) \subset \prod_p X(\mathbb{Q}_p)$$

следуют из условий сравнений (и действительных условий). Здесь p – простое число или $p = \infty$, в прследнем случае мы полагаем $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$. Множество $X(A_{\mathbb{Q}})$ – множество аделей – состоит из решений с целыми коэффициентами для почти всех p.

Теорема Лежандра

Теорема (Legendre, 1785) *Пусть* $q(x, y, z)$ *– целая квадратичная форма. Если уравнение* $q(x, y, z) = 0$ *имеет нетривиальное решение в каждом* $\mathbb{Z}_p$*, в том числе в* $\mathbb{R}$*, тогда существует нетривиальное решение в* $\mathbb{Z}$*.*

Доказательство вытекает из геометрии чисел. Оно также даёт верхнюю оценку для наименьшего решения.

В различных доказательствах не используются все условия, например, можно опустить условие $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, которое автоматически выполняется если $X(\mathbb{Z}_p) \neq \emptyset$ для каждого (конечного) p. Этот любопытный факт является частным случаем закона взаимности.

Квадратичный закон взаимности

Пусть $p \neq 2$ – нечётное простое число, $a \in \mathbb{Z}$ взаимно просто с p,
Определим символ Лежандра $(a/p) = \pm 1$:
$(a/p) = 1$ тогда и только тогда, когда a является квадратом по модулю p.

Пусть p, q – нечётные простые числа. Тогда

$$(p/q)(q/p) = (-1)^{(p-1)/2.(q-1)/2}$$

Это утверждение было сформулировано как гипотеза независимо Эйлером и Лежандром (1785). Первое из серии доказательств было найдено Гауссом 18-го апреля 1796.

Пусть p – нечётное простое число.
Первый дополнительный закон

$$(-1/p) = (-1)^{(p-1)/2}$$

Получаем : -1 является квадратом по модулю p тогда и только тогда, когда $p \equiv 1(4)$.

Второй дополнительный закон

$$(2/p) = (-1)^{(p^2-1)/8}$$

Получаем : 2 является квадратом по модулю p тогда и только тогда, когда $p \equiv \pm 1(8)$.

Принцип Хассе для квадратичных форм

Теорема (Minkowski; Hasse 1920) *Пусть* $n \geq 2$*. Пусть* $q(x_1, \cdots, x_n)$ *– целая квадратичная форма. Если уравнение*

$$q(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

имеет нетривиальные решения в каждом $\mathbb{Z}_p$*, в том числе в* $\mathbb{R}$*, тогда существует решение в* $\mathbb{Z}$*.*

Основной аргумент в доказательстве Хассе – это переход от случая трёх переменных (Legendre) к случаю четырёх переменных. Хассе использует теорему Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии и закон взаимности.

Следующие знаменитые теоремы можно рассматривать как локально-глобальные принципы для решения уравнений с целыми коэффициентами.

Каждое простое число p, сравнимое с 1 по модулю 4, является суммой двух квадратов (Fermat).

Уравнение $n = x^2 + y^2 + z^2$, где n – целое число, имеет решение в целых числах, если существуют решения в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{Z}_2$ (то есть $n > 0$ и $n \neq 4^r(8m + 7)$) (Legendre, Gauß)

Уравнение $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, где n – целое число, имеет решение в целых числах если $n > 0$ (Lagrange)

Вопрос : **существуют ли подобные локально-глобальные теоремы для других классов уравнений?**
Другими словами, нас интересует, когда выполняется "принцип Хассе".
Рассмотрим несколько классических результатов в этом направлении.

Для рациональных точек :

Проективные однородные пространства связных линейных алгебраических групп (теория полей классов и теория линейных алгебраических групп, Eichler, Kneser, Harder).

Проективные гиперповерхности $F_d(x_0, \cdots, x_n) = 0$, где n – достаточно велико по сравнению с d : круговой метод.

Для целых точек :

Представление целого числа как значения целой *неопределённой* квадратичной формы от четырёх переменных (Eichler, Kneser)

Представление целого числа как значения некоторых форм $F_d(x_0, \cdots, x_n)$ с целыми коэффициентами, где n – достаточно большое число по сравнению со степенью d (проблема Уаринга (Waring), круговой метод).

Упражнение. Доказать принцип Хассе для системы уравнений

$$q_1(x_1, y_1) = \cdots = q_n(x_n, y_n) \neq 0$$

где $q_i(x_i, y_i)$ – невырожденные квадратичные формы от двух переменных с коэффициентами в $\mathbb{Q}$.

Идея : использовать доказательство Хассе для перехода от квадратичных форм от трёх переменных к квадратичным формам от четырёх переменных.

В следующих упражнениях достаточно использовать переход от случая четырёх переменных к случаю пяти переменных в доказательстве Хассе.

– Докажите, что принцип Хассе для рациональных точек выполняется для уравнения

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i^2 = P(x_4) \neq 0,$$

где $a_i \in \mathbb{Q}^\times$ и $P(t) \neq 0$ – многочлен.

– Докажите, что принцип Хассе для рациональных точек выполняется для

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(t) x_i^2 = a_5(t) \neq 0$$

где $a_i(t)$ – ненулевые многочлены.

Контрпримеры к “принципу Хассе” для рациональных точек

Примеры Хассе и Витта, 1934

Уравнение $\mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x) = c$, где $K/\mathbb{Q}$ – некоторое расширение Галуа с группой $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Пример: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$, $c = 5^2, 7^2, 10^2, 11^2, 14^2$ (см. Касселс-Фрёлих стр. 360).

Пример Линда (Lind, 1940)
Существует кривая рода 1 над $\mathbb{Q}$, у которой есть точки в каждом $\mathbb{Q}_p$ и в $\mathbb{R}$, но нет точек в $\mathbb{Q}$.

$$2y^2 = x^4 - 17, \;\; x, y \in \mathbb{Q}$$

$$2u^2 = v^4 - 17w^4 \neq 0, \;\; u, v, w \in \mathbb{Z}, \;\; (v, w) = 1$$

Заметим, что u не делится на 17 (сравнение по модулю 17^2).
Так как 2 не является четвёртой степенью по модулю 17, получаем: *u не является квадратом по модулю 17*.

Если p – нечётное простое число, которое делит u (и, значит, $p \neq 17$), тогда 17 является квадратом по модулю p, откуда (закон квадратичной взаимности) p является квадратом по модулю 17. Так как 2 также является квадратом по модулю 17, получаем вывод : *u является квадратом по модулю 17*. Противоречие, $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Пример Исковского (1971)

Это (геометрически) “рациональная” поверхность: семейство коник, зависящее от одного параметра, у которого есть точки во всех $\mathbb{Q}_p$ и в $\mathbb{R}$, но нет точек в $\mathbb{Q}$.

$$y^2 + z^2 = (3 - x^2)(x^2 - 2)$$

Решения $x, y, z \in \mathbb{Q}$?

$$u^2 + v^2 = (3y^2 - x^2)(x^2 - 2y^2) \neq 0,$$

где $u, v, x, y \in \mathbb{Z}, (x, y) = 1$, откуда $(3y^2 - x^2, x^2 - 2y^2) = 1$

По модулю 4, пара $(3y^2 - x^2, x^2 - 2y^2)$ может принимать одно из следующих значений :

$$(2, -1), (-1, 1), (3, 2)$$

В $\mathbb{R}$ имеем : $3y^2 - x^2 > 0, \;\; x^2 - 2y^2 > 0.$

$$u^2 + v^2 = (3y^2 - x^2)(x^2 - 2y^2) \neq 0,$$

Пусть p – нечётное простое число. Если p^{2n+1} делит в точности либо $3y^2 - x^2$, либо $x^2 - 2y^2$, то p^{2n+1} делит в точности $u^2 + v^2$, откуда -1 является квадратом по модулю p, откуда (первый дополнительный закон) $p \equiv 1$ по модулю 4.
Таким образом, пара $(3y^2 - x^2, x^2 - 2y^2)$ принимает одно из следующих значений по модулю 4 :

$$(1, 1), (2, 1), (1, 2)$$

то есть никакое из предыдущих значений

$$(2, -1), (-1, 1), (3, 2)$$

Противоречие, $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Упражнение. Обобщить для $y^2 + z^2 = (c - x^2)(x^2 - c + 1)$ где $c > 0$ сравнимо с 3 по модулю 4.

Упражнение (Swinnerton-Dyer, 1961). Докажите, что множество действительных решений $X(\mathbb{R})$ поверхности X, заданной уравнением $y^2 + z^2 = (4x - 7)(x^2 - 2)$, имеет две связные компоненты, $x \geq 7/4$ и $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, и что во второй компоненте нет рациональных точек ("дефект слабой аппроксимации").

Примеры (более сложные), которые мы приводим без пояснений :

$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ (Selmer)

$5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0$ (Cassels-Guy, 1966)

Многочисленные примеры для

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, без кубического делителя.
Гипотеза (CT-Kanevsky-Sansuc) : Если существует простое число p, которое делит только одно из чисел a, b, c, d, тогда принцип Хассе выполняется для такого уравнения.

Контрпримеры к принципу Хассе для целых точек

Уравнения

$$q(x, y) = a$$

$$q(x, y, z) = a,$$

где q – квадратичная форма с целыми коэффициентами.

Для следующих уравнений существуют решения во всех $\mathbb{Z}_p$ и в $\mathbb{R}$, но нет решений в $\mathbb{Z}$:
Уравнение $23 = x(x + 7y)$
Система уравнений $\{2x - 5y = 1, xt = 1\}$
Уравнение $1 = 4x^2 + 25y^2$
(элементарные аргументы)

Уравнение $1 = 4x^2 - 475y^2$ (сложнее!)

(Дополнение к этим кривым в $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ состоит из двух точек, которые являются рациональными или квадратичными сопряжёнными.)

Для простого числа q уравнение $q = x^2 + 27y^2$
имеет решения во всех $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда $q \equiv 1$ по модулю 3.
Если это условие выполняется, то существует решение в $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда 2 является кубом в $\mathbf{F}_q$ (*а приори* довольно загадочное условие).

Euler, Gauß, D. Cox (см. книгу о $p = x^2 + ny^2$).

Schulze-Pillot и Xu

Пусть $X_{n,m}$ с $n, m \in \mathbb{N}$, $(n, m) = 1$ задано уравнением

$$m^2x^2 + n^{2k}y^2 - nz^2 = 1.$$

Тогда $X_{n,m}(\mathbb{Z}_p) \neq \emptyset$ для любого простого числа p.
$X_{n,m}(\mathbb{Z}) = \emptyset$ если
– либо 2 делит в точности m и $n \equiv 5$ по модулю 8
– либо 4 делит m и $n \equiv \pm 3$ по модулю 8.

Теорема (Schulze-Pillot и Xu). В остальных случаях $X_{n,m}(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$.

Боровой и Рудник, 1995

Рассмотрим уравнение в $\mathbb{Z}$:

$$q(x, y, z) = -9x^2 + 2xy + 7y^2 + 2z^2 = 1,$$

то есть

$$(x - y)^2 + 8(x - y)(x + y) = 2z^2 - 1.$$

Решение в $\mathbb{Q}$

$$(x, y, z) = (-1/2, 1/2, 1)$$

значит, решения во всех $\mathbb{Z}_p$ для $p \neq 2$.

Решение в $\mathbb{Z}_2$ (использовать, что $q(4, 1, 1) = -127 \equiv 1(8)$).

$$(x-y)^2+8(x-y)(x+y)=2z^2-1$$

Решения $(x, y, z) \in \mathbb{Z}$?

Рассмотрим уравнение по модулю степеней 2, получим

$$x-y \equiv \pm 3 \ (8)$$

Пусть p – простое число.

Если p делит $x-y$, то p делит $2z^2-1$.

Таким образом, p является нечётным и 2 – квадрат по модулю p

(второй дополнительный закон)

$\Longrightarrow p \equiv \pm\, 1(8)$.

Значит, $x-y \equiv \pm 1 \ (8)$.

Противоречие, $X(\mathbb{Z})=\emptyset$.

Заметим, что во многих контрпримерах ключевым инструментом является закон квадратичной взаимности.

Попытаемся понять, какие алгебраические свойства рассматриваемых уравнений позволяют производить такие вычисления.

В лекциях мы ограничимся вопросом существования рациональных и целых точек для следующих классов многообразий:

Однородные пространства связных линейных алгебраических групп

Семейства таких пространств, зависящие от одного параметра

Методы, которые мы рассмотрим далее, также были использованы в изучении рациональных точек кривых произвольного рода, геометрически рациональных поверхностей, поверхностей K3, а также поверхностей Энрикеса.

Предварительные сведения из алгебраической геометрии; группа Пикара

Пусть A – коммутативное кольцо с единицей. Обозначим $X = \mathrm{Spec} A$ – спектр этого кольца, то есть множество простых идеалов A. Топология Зарисского на $\mathrm{Spec} A$: базисом открытых множеств являются $X_f = \mathrm{Spec} A[1/f]$, где $f \in A$ не является делителем нуля. Получаем пучок колец на X, заданный как $A[1/f]$ на X_f.

Схема X – это топологическое пространство, наделённое пучком коммутативных колец, для которого существует базис открытых аффинных схем, определённых выше.

Таким образом, схемы получены склеиванием открытых аффинных подсхем.

Пример : проективная прямая $\mathbb{P}^1_k$, полученная склеиванием $\mathrm{Spec} k[t]$ и $\mathrm{Spec} k[1/t]$.

Нётерево кольцо A называется кольцом дискретного нормирования, если оно является целым, локальным, и максимальный идеал порождается одним элементом. На поле частных K такого кольца A определено дискретное нормирование, то есть гомоморфизм $v : K^\times \to \mathbb{Z}$, такой, что

$$v(x+y) \geq inf(v(x), v(y)),$$

где равенство выполняется если $v(x) \neq v(y)$. Имеем:

$$A = \{x \in K, v(x) \geq 0\}$$

$$m = \{x \in K, v(x) \geq 1.\}$$

Пример кольца дискретного нормирования: $\mathbb{Z}_{(p)}$ – локализация $\mathbb{Z}$ в p.
Кольцо Дедекинда – это нётерево кольцо, все локализации A_p которого являются кольцами дискретного нормирования или полем.
Примеры:
Кольца целых элементов числового поля и локализации этих колец.
Если K – конечное сепарабельное расширение поля $k(t)$, целое замыкание $k[t]$ в K.

Пусть задано коммутативное нётерево кольцо A; A-схемой конечного типа называется схема X, для которой существует конечное открытое покрытие схемами $\mathrm{Spec} B$, где B – A-алгебра конечного типа, то есть алгебра, порождённая конечным числом элементов.
Для A-схем рассматривают множество “А-точек” $X(A)$.
В случае, когда A является полем k (“многообразия”, "k-многообразия"), $X(k)$ – множество рациональных точек X.
В случае, когда A является кольцом дискретного нормирования или кольцом Дедекинда (“арифметические схемы”), $X(A)$ – множество “целых” точек.

Интересные свойства нётеревых целостных (без делителей нуля) колец.
Нормальное кольцо : целозамкнутое в своём поле частных K.
Для такого кольца, локализация A_p в простом идеале высоты 1 является кольцом дискретного нормирования, мы обозначаем $v_p : K^\times \to \mathbb{Z}$ соответствующее нормирование. Имеем $A = \bigcap_{p, ht(p)=1} A_p \subset K$.
Факториальное кольцо: каждый простой идеал высоты 1 является главным. Такое кольцо является нормальным.
Локально факториальное кольцо : все локализации A_p являются факториальными кольцами.
Регулярное локальное кольцо : максимальный идеал порождается $dim(A)$ элементами. Такие кольца являются факториальными (Auslander-Buchsbaum-Serre).
Регулярное кольцо: все локализации являются регулярными.

Глобальные свойства k-многообразий (k – поле)

гладкое k-многообразие : локально заданное конечной системой многочленов, которые удовлетворяют критерию Якоби.
Например, $f(x,y)=0$, где f, f'_x, f'_y не имеют общих корней в алгебраическом замыкании k.
Гладкое k-многообразие является регулярной схемой.

проективное k-многообразие: заданное конечным числом однородных уравнений в проективном пространстве.
Аналог: $X \subset \mathbb{P}^n_A$, где A – кольцо дискретного нормирования с полем частных K. Схема X является "собственной"над A :

$$X(A) = X(K).$$

На схеме X определены пучок колец O_X и пучок мультипликативных групп $O_X^\times$.
Определим
$$\mathrm{Pic}(X) = H^1_{Zar}(X, O_X^\times).$$
Морфизм $X \to Y$ индуцирует отображение $\mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$, выполняются свойства функториальности.

Пусть X – целая схема, обозначим K_X – поле функций X (или "поле рациональных функций X"), что определяет постоянный пучок на X. Кообраз вложения $O_X^\times \to K_X^\times$ определяет пучок дивизоров Картье на X (подмногообразия, локально определённые одним уравнением).

Предположим, что схема X является нётеровой и регулярной. Тогда
дивизоры Картье = дивизоры Вейля,
имеем точную последовательность пучков

$$1 \to O_X^\times \to K_X^\times \to \oplus_{x \in X^1} \mathbb{Z}_x \to 0,$$

где $\mathbb{Z}_x$ – постоянный пучок $\mathbb{Z}$ в точке x коразмерности 1, и отображение $K_X^\times \to \mathbb{Z}_x$ задано следующим образом: $f \mapsto v_x(f)$, где v_x – дискретное нормирование локального кольца $O_{X,x}$: кратность нуля или полюса функции f в соответствующем подмногообразии коразмерности 1.
Обозначив $WDiv(X) = \oplus_{x \in X^1} \mathbb{Z}$, получаем точную последовательность групп

$$1 \to \Gamma(X, O_X^\times) \to K_X^\times \to WDiv(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0.$$

Последовательность локализации. Пусть U непустое открытое подмногообразие гладкого целого k-многообразия X. Множество T точек коразмерности 1 в $X \setminus U$ является конечным. Имеем точную последовательность

$$1 \to k[X]^\times \to k[U]^\times \to \oplus_{x \in T}\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(U) \to 0.$$

Таким образом, $\mathrm{Pic}(X)$ – абелева группа конечного типа тогда и только тогда, когда существует непустое открытое подмногообразие $U \subset X$, такое, что $\mathrm{Pic}(U) = 0$.

Упражнения.

Пусть k – поле.

1. Докажите, что $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}_k^n) = 0$.
2. Докажите, что $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_k^n) = \mathbb{Z}H$, где H – класс гиперплоскости.
3. Докажите, что если X/k – гладкое многообразие, то $\mathrm{Pic}(X \times_k \mathbb{P}_k^n) \simeq \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$.
4. Пусть $X \subset \mathbb{P}_k^3$ – квадрика $xy - zt = 0$. Покажите, что $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
5. Пусть $X \subset \mathbb{P}_k^n$ – гладкая квадрика, заданная уравнением $x_0 x_1 + \sum_{i=2}^n a_i x_i^2 = 0$. Докажите, что $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$, где H – класс гиперплоскости. Докажите, что для Y, заданного аффинным уравнением $xy - zt = 1$, имеем $\mathrm{Pic}(Y) = 0$. Покажите, что Y не изоморфно аффинному пространству $\mathbb{A}_k^3$.

Для гладких проективных и целых X/k и Y/k следующие свойства равносильны:
(a) Поля функций $k(X)$ и $k(Y)$ k-изоморфны.
(b) Существуют непустые открытые подмногообразия $U \subset X$ и $V \subset Y$, которые k-изоморфны.
В таком случае говорят, что X и Y являются k-бирациональными.

Упражнение. Докажите, что тогда существуют целые числа $r, s \geq 0$, такие, что

$$\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}^r \simeq \mathrm{Pic}(Y) \oplus \mathbb{Z}^s.$$

Целое k-многообразие X называется k-унирациональным, если существует k-вложение $k(X) \subset k(\mathbb{A}^n)$. Если к тому же X/k – гладкое проективное многообразие и $car(k) = 0$, то $\mathrm{Pic}(X)$ – абелева группа конечного типа.

Каждому гладкому, проективному, геометрически целому многообразию X/k над полем k мы ставим в соответствие k-многообразие Пикара $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$. Это – абелево многообразие (проективное и наделённое структурой группы).
Если k поле характеристики нуль, его размерность равна размерности k-векторного пространства (конечной размерности) $H^1(X, O_X)$.
Существует точная последовательность модулей Галуа

$$0 \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}(\overline{k}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) \to 0,$$

где $NS(\overline{X})$ – абелева группа конечного типа, группа Нерона-Севери $\overline{X}$.
Для кривой $NS(\overline{X}) = \mathbb{Z}$, отображение $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) = \mathbb{Z}$ совпадает с отображением степени для дивизоров.

Немного когомологий Галуа

(см. курс Б. Кунявского прошлого года)

Пусть G – конечная группа. Каждому G-модулю A (A – абелева группа, наделённая действием конечной группы G), поставим в соответствие подгруппу инвариантов $A^G \subset A$.
Точная последовательность G-модулей

$$1 \to A \to B \to C \to 0$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G.$$

Отображение $B^G \to C^G$ не обязательно является сюрьевтивным.

Из гомологической алгебры, каждому G-модулю A можно поставить в соответствие абелевы группы $H^i(G, A)$ ($i \geq 0$). Это соответствие является функториальным по A, группы $H^0(G, A)$ и предыдущая короткая точная последовательность порождают бесконечную точную последовательность

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G \to H^1(G, A) \to H^1(G, B)$$

$$\to H^1(G, C) \to H^2(G, A) \to H^2(G, B) \to \cdots$$

Группы $H^i(G, A)$ можно описать как факторгруппы групп "коциклов" по подгруппам "кограниц".
Для проконечной группы $\mathfrak{g}$ (обратный предел конечных групп, например, абсолютная группа Галуа поля), наделённой естественной топологией компактной группы и для непрерывных дискретных $\mathfrak{g}$-модулей (стабилизатор каждой точки является открытым и замкнутым в группе $\mathfrak{g}$) теория аналогична.
Если $G_k = Gal(\overline{k}/k)$ – абсолютная группа Галуа поля k, то часто обозначают $H^i(k, A) = H^i(G_k, A)$.

Группы $H^i(G,A)$, где $i \geq 1$, являются группами кручения и, если G – конечная группа, аннулируются порядком G. В частности, если A – $\mathbb{Q}$-векторное пространство, $H^i(G,A) = 0$ для $i \geq 1$.
Для G-модуля A, на котором группа G действует тривиально, имеем $H^1(G,A) = Hom(G,A)$.
Для каждой G-решётки перестановок P (прямая сумма $\mathbb{Z}[G/H]$) имеем $H^1(G,P) = 0$.
Точная последовательность G-модулей

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

индуцирует изоморфизмы

$$H^i(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq H^{i+1}(G,\mathbb{Z})$$

($i \geq 1$). В частности, $Hom(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq H^2(G,\mathbb{Z})$.

Пусть K/k – расширение Галуа с группой G.
Ключевая теорема: теорема 90 Гильберта, в форме Эмми Нётер :

$$H^1(G, K^\times) = 0.$$

Изначальная версия Гильберта сформулирована для K/k – циклического расширения с группой $G =< \sigma >$: каждый элемент $x \in K^\times$ нормы $Norm_{K/k}(x) = 1$ можно представить как $x = \sigma(y)/y$ для некоторого $y \in K$.

Пусть $\overline{k}$ – сепарабельное замыкание поля k, и пусть $g = Gal(\overline{k}/k)$.
Имеем $H^0(g, \overline{k}^\times) = k^\times$ и $H^1(g, \overline{k}^\times) = 0$.

Группа $H^2(g, \overline{k}^\times)$ называется **группой Брауэра** $\mathrm{Br}(k)$ поля k.

Впервые эта группа была определена (некогомологическим способом) Ричардом Брауэром как группа классов эквиважетности центральных простых алгебр (конечной размерности) над полем k, где сложение задано тензорным произведением алгебр и отношение эквивалентности – условием, что классы матричных алгебр тривиальны.

Последовательность Куммера
Пусть $n > 0$ – целое число, не равное нулю в k. Возведение в степень n в $\overline{k}^{\times}$ задаёт точную последовательность модулей Галуа

$$1 \to \mu_n \to \overline{k}^{\times} \to \overline{k}^{\times} \to 1.$$

Используя теорему 90 Гильберта, получим

$$k^{\times}/k^{\times n} \simeq H^1(g, \mu_n)$$

и

$$H^2(g, \mu_n) \simeq \mathrm{Br}(k)[n].$$

$(A[n] := \{x \in A, nx = 0\}.)$

Группа Пикара и расширения базового поля

Пусть X/k – гладкое проективное геометрически целое многообразие и пусть $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.
Имеем $\overline{k}^\times = \overline{k}[X]^\times$.
Можно рассмотреть точную последовательность

$$1 \to \overline{k}^\times \to \overline{k}(X)^\times \to Div(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to 0,$$

разделить её на две короткие точные последовательности

$$1 \to \overline{k}^\times \to \overline{k}(X)^\times \to \overline{k}(X)^\times/\overline{k}^\times \to 1$$

и

$$1 \to \overline{k}(X)^\times/\overline{k}^\times \to Div(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to 0,$$

и рассмотреть соответствующие точные последовательности когомологий Галуа.

Используя, что $H^1(g,\overline{k}^\times) = 0$, $H^1(g,\overline{k}(X)^\times) = 0$ (случаи теоремы Гильберта 90), а также, что $Div(X) = Div(\overline{X})^G$ (Картье) и $H^1(g, Div(\overline{X})) = 0$ (Шапиро/Фадеев), несложно получить точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^g \to H^2(g,\overline{k}^\times) \to H^2(g,\overline{k}(X)^\times)$$

и

$$0 \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^2(g,\overline{k}(X)^\times/\overline{k}^\times) \to H^2(g, Div(\overline{X})).$$

Можно определить "алгебраическую группу Брауэра" гладкого k-многообразия X как

$$\mathrm{Br}_{alg}(X) := Ker[H^2(g, \overline{k}(X)^{\times}) \to H^2(g, Div(\overline{X})].$$

Можно заметить, что мы имеем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}_{alg}(X)/Im(\mathrm{Br}(k)) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(g, \overline{k}^{\times}),$$

а также (ещё немного поработав), что при условии $X(k) \neq \emptyset$, имеем
$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{X})^g$ и $\mathrm{Br}_{alg}(X)/Im(\mathrm{Br}(k)) \simeq H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$.

Упражнение. Пусть $X \subset \mathbb{P}^2_k$ – гладкая коника, заданная уравнением $x^2 - ay^2 - bt^2 = 0$ ($car(k) \neq 2$). Докажите, что $\mathrm{Pic}(\overline{X})^g = \mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathbb{Z}$ порождается классом точки в $\overline{k}$, и что образ такого класса в $H^2(g, \overline{k}^\times)$ является группой порядка не более 2, порождённой классом алгебры кватернионов (a, b), и что существует точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}/2(a, b) \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_{alg}(X) \to 0.$$

Упражнение. Пусть $f(x, y, z, t)$ – невырожденная квадратичная форма над k. Пусть $d \in k^{\times}$ – дискриминант f. Пусть $X \subset \mathbb{P}^3_k$ – гладкая квадрика, заданная условием $f = 0$. Тогда :

(a) Существует изоморфизм g-решёток $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \simeq \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, где действие группы Галуа задано следующим образом.
(b) Если $d \in k^{\times 2}$, то действие g на $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ является тривиальным.
(c) Если $d \notin k^{\times 2}$, то действие g факторизуется через $\mathrm{Gal}(k(\sqrt{d}/k)) \simeq \mathbb{Z}/2$, последняя группа действует перестановкой e_1 и e_2.
(d) Класс $e_1 + e_2$ принадлежит $\mathrm{Pic}(X) \subset \mathrm{Pic}(\overline{X})$, это класс гиперплоского сечения квадрики $X \subset \mathbb{P}^3_k$.
(e) Существует естественная точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^g \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_{alg}(X) \to 0.$$

(f) Имеем: $X(k) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $X(k(\sqrt{d})) \neq \emptyset$.

Пусть $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ – гладкая аффинная квадрика, заданная уравнением $q(x, y, z) = a$, где q – невырожденная квадратичная форма и $a \in k^\times$. Предположим, что $Y(k) \neq \emptyset$.
Докажите, что
(a) $\overline{k}^\times = \overline{k}[Y]^\times$, и $\mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{Pic}(\overline{Y})^g$.
(b) Если $-a.det(q) \in k^{\times 2}$, то $\mathbb{Z} = \mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{Pic}(\overline{Y})^g$ и $\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}_{alg}(Y)$
(c) Если $-a.det(q) \notin k^{\times 2}$, то $0 = \mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{Pic}(\overline{Y})^g$ и $\mathrm{Br}_{alg}(Y)/\mathrm{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$.

Группа Брауэра схем

Пусть A – полное кольцо дискретного нормирования с полем функций K, и с совершенным полем вычетов F. Имеем вложения $K \subset K_{nr} \subset \overline{K}$ и $F \subset \overline{F}$. Здесь K_{nr} – максимальное неразветвлённое расширение. Группа Галуа G расширения K_{nr} поля K является группой Галуа $\overline{F}$ над F. Используя отображение нормирования $K_{nr}^{\times} \to \mathbb{Z}$, получаем отображение

$$H^2(G, K_{nr}^{\times}) \to H^2(G, \mathbb{Z}) \simeq H^1(G_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Имеем естественное отображение $H^2(G, K_{nr}^{\times}) \to H^2(G_K, \overline{K}^{\times})$; доказывается, что оно является изоморфизмом. Таким образом, получаем отображение "вычета"

$$\partial_A : \mathrm{Br}(K) \to H^1(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Аналогичным образом, получаем отображение

$$\partial_A : \mathrm{Br}(K) \to H^1(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

для любого кольца дискретного нормирования A с совершенным полем вычетов F.
Это отображение ставит в соответствие классу алгебры кватернионов $(a, b)_K$ (где $a, b \in K^\times$) класс

$$(-1)^{v(a)v(b)} a^{v(b)}/b^{v(a)} \in A^\times$$

в $F^\times/F^{\times 2} = H^1(F, \mathbb{Z}/2) \subset H^1(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Пусть X – гладкое целое многообразие над полем k характеристики нуль. Определим неразветвлённую группу Брауэра как

$$\mathrm{Br}_{nr}(X) := \bigcap_{x \in X^{(1)}} Ker(\partial_x) \subset \mathrm{Br}(k(X)).$$

Используя это простое определение, можно показать, например, что если X/k – проективное многообразие, k-бирациональное проективному пространству, то $\mathrm{Br}(k) \simeq \mathrm{Br}_{nr}(X)$.
Однако, этого определения недостаточно, чтобы показать, что соответствие $X \mapsto \mathrm{Br}_{nr}(X)$ является котравариантным функтором для произвольных морфизмов гладких многообразий.
В частности, непонятно, как вычислять значения в рациональных точках

$$\mathrm{Br}_{nr}(X) \times X(k) \to \mathrm{Br}(k).$$

Чтобы определить группу Брауэра произвольной схемы X, функториально по X, можно
– либо использовать "приземлённую"версию, заменив простые центральные алгебры над полем на алгебры Азумая на схемах (как мы переходим от векторных пространств над полем к векторным расслоениям на схемах), откуда получаем группу $\mathrm{Br}_{Az}(X)$
– либо использовать этальные когомологии (Гротендик), что является продолжением когомологий Галуа над полем, и определить $\mathrm{Br}(X) = H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m)$.

Для каждой схемы X существует инъективное отображение $\mathrm{Br}_{Az}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(X)$, которое является изоморфизмом, если X – квазипроективное гладкое k-многообразие (Gabber).

Можно показать (SGA4), что для гладкого целого многообразия над полем k характеристики нуль $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}_{nr}(k(X)) \subset \mathrm{Br}(k(X))$, то есть существует точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k(X)) \to \oplus_{x \in X^{(1)}} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Как следствие, получаем k-бирациональную инвариантность $\mathrm{Br}(X)$ для гладких проективных целых k-многообразий.

Вычисления группы Брауэра

Предположим, что $car(k) = 0$ и что X – гладкое, геометрически целое k-многообразие. Обозначим $\overline{X} := X \times_k \overline{k}$.
В изучении группы Брауэра X выделим две части.
Изучение группы Брауэра $\overline{X}$ и образа $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})$ ("трансцендентная группа Браэура").
Изучение

$$\mathrm{Br}_1(X) := Ker[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})].$$

Можно показать, что $\mathrm{Br}_1(X) = \mathrm{Br}_{alg}(X)$ как определено выше.
В этих лекциях нас интересуют в основном многообразия, для которых мы можем показать, что $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$.

Пусть X/k – гладкое и геометрически целое многообразие, такое, что $\overline{k}^{\times} = \overline{k}[X]^{\times}$. Используя этальные когомологии, можно получить точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Pic} X \to (\operatorname{Pic} \overline{X})^{\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)} \to^{*} \operatorname{Br} k \to$$

$$\operatorname{Br}_1 X \to \mathrm{H}^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X}) \to^{*} \mathrm{H}^3(k, \overline{k}^{\times})$$

где отображения со звёздочкой равны нулю если $X(k) \neq \emptyset$.
Группа $\mathrm{H}^3(k, \overline{k}^{\times})$ является тривиальной, если k – числовое поле (глобальная теория полей классов).
В некоторых случаях легко вычислить $\mathrm{H}^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$, но трудно конкретно указать элементы этой группы в $\operatorname{Br}_1(X)$.

Дополнительную инфомацию и больше деталей о вычислении группы Брауэра можно найти в моём тексте Bremen 2005.

Обратно к арифметике

Числовые поля

Числовое поле k – это поле, которое является конечным расширением поля $\mathbb{Q}$.
Обозначим Ω – множество нормирований (“мест”) , архимедовых или нет, поля k. Пополнения k_v называются “локальными полями”.
Если $v \in \Omega$ - неархимедово, т.е. v – дискретное нормирование $v : k^* \to \mathbb{Z}$, пополнение k_v является конечным расширением поля $\mathbb{Q}_p$. Обозначим $O_v \subset k_v$ – кольцо целых элементов.
Если $v \in \Omega$ - архимедово, пополнение k_v является либо полем $\mathbb{R}$, либо полем $\mathbb{C}$. Обозначим $O_v = k_v$.
Если $S \subset \Omega$ – конечное множество мест, которое содержит все архимедовы места, обозначим $O_S \subset k$ –кольцо S-целых элементов ($v(x) \geq 0$ для $v \notin S$).

Слабая аппроксимация
Для каждого конечного подмножества $S \subset \Omega$, диагональное вложение $k \to \prod_{v \in S} k_v$ является плотным.

Сильная аппроксимация
Пусть $S \subset \Omega$ – конечное множество мест, которое содержит все архимедовы места. Для $v \in S$, пусть $U_v \subset k_v$ – непустое открытое подмножество. Пусть $v_0 \in S$. Множество

$$\prod_{v \in S \setminus \{v_0\}} U_v \times \prod_{v \notin S} O_v$$

содержит диагональный образ некоторого элемента k.
Другими словами, k является плотным в “ограниченном произведении” k_v по отношению к O_v, для $v \neq v_0$.
Это обобщает китайскую теорему об остатках.

Для локального поля k_v существует естественное вложение

$$i_v : \mathrm{Br}(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Имеем: $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2$ образовано классом кватернионов Гамильтона и $\mathrm{Br}(\mathbb{C}) = 0$.
Если v – конечное место, i_v является изоморфизмом, заданным отображением вычета

$$\partial_v : \mathrm{Br}(k_v) \to H^1(F_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

как описано выше. Знак определяется выбором порождающего элемента в абсолютной группе Галуа конечных полей.
На самом деле, $\mathrm{Br}(O_v) = \mathrm{Br}(F_v) = 0$,
где O_v – кольцо целых элементов поля k_v и F_v – конечное поле вычетов.

Фундаментальным результатом *теории полей классов* является теорема, что отображения i_v порождают точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \bigoplus_v \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

– Из этого утверждения следует принцип Хассе для $Norm_{K/k}(x) = c$, если K/k – циклическое расширение.
– Утверждение, что композиция равна нулю, содержит закон квадратичной взаимности и его дополнения: достаточно рассмотреть класс $(p, q) \in \mathrm{Br}(\mathbb{Q})$ алгебры кватернионов, где p и q – простые числа.
– Точная последовательность также содержит утверждение, что если коника над числовым полем имеет точки во всех пополнениях k_v, кроме, возможно, одного k_{v_0}, тогда существуют и точки в k_{v_0} и в k.

Многообразия над числовыми полями, принцип Хассе, слабая аппроксимация, сильная аппроксимация

Пусть X – гладкое, геометрически целое k-многообразие над числовым полем k.
Говорят, что **слабая аппроксимация** выполняется для X, если диагональное вложение

$$X(k) \to \prod_{v \in \Omega} X(k_v)$$

является плотным, где в правой части рассматривается топология произведения.
Это определение слабой аппроксимации содержит принцип Хассе для рациональных точек.
Это понятие является k-бирациональным. Можно также ограничиться рассмотрением проективных многообразий.

Классические случаи

– Проективное пространство $\mathbb{P}^n_k$
– Гладкие квадрики (Хассе)
– Многообразия Севери-Брауэра (F. Châtelet)
– Уравнения $Norm_{K/k}(x) = c$, где K/k – циклическое расширение
– Главные однородные пространства полупростых односвязных линейных алгебраических групп (Eichler, Kneser, Harder, Chernousov)
– Проективные однородные пространства связных линейных алгебраических групп (Harder) : это утверждение содержит случаи квадрик и многообразий Севери-Браэура
– Главные однородные пространства k-рационального k-тора (Воскресенский)

Гипотезы
Системы уравнений

$$y_i^2 - a_i z_i^2 = P_i(x) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

где $a_i \in k^\times$ и многочлены $P_i(x)$ являются неприводимыми.

Известно для $y^2 - az^2 = P(x)$, где $P(x)$ – неприводимый многочлен степени 4 (CT, Sansuc, Swinnerton-Dyer 1987).

Известно в общем случае по модулю гипотезы BDS (гипотеза Буняковского-Диксона-Шинцеля: обобщённая гипотеза простых чисел-близнецов).

Гипотезы
– Гладкие кубические гиперповерхности в $\mathbb{P}^n_k$ для $n \geq 4$.
Известно для $n \geq 9$ (Heath-Brown для $\mathbb{Q}$, Browning-Vishe – недавно полученный результат для числовых полей)
– Гладкие полные пересечения двух квадрик в $\mathbb{P}^n_k$ для $n \geq 5$.
Известно для $n \geq 8$ (CT, Sansuc, Swinnerton-Dyer 1987).
Результат при условии, что выполняется BDS и Тейт-Шафаревич, для $n \geq 5$: Wittenberg.

Пусть X – гладкое геометрически целое k-многообразие над числовым полем k. Пусть $S \subset \Omega$ – конечное *непустое* подмножество. Говорят, что для X выполняется **сильная аппроксимация вне** S, если выполняется следующее свойство. Для каждого конечного множества мест T, которое содержит S и архимедовы места, и для каждого семейства непустых открытых подмножеств $U_v \subset X(k_v)$ для $v \in T \setminus S$, и каждой O_T-схемы конечного типа $\mathcal{X}/O_T$, которая является моделью X/k, то есть $\mathcal{X} \times_{O_T} k \simeq X$, если произведение

$$\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S} U_v \times \prod_{v \notin T} \mathcal{X}(O_v)$$

непусто, то в этом произведении существует точка из $X(k)$ (и, значит, из $\mathcal{X}(O_T)$).

Это утверждение содержит локально-глобальный принцип для существования O_S-целых точек на O_S-моделях X :

Если $\mathcal{X}/O_S$ – целая модель X/k, и если

$$\prod_{v \in S \cup \infty} X(k_v) \times \prod_{v \notin S \cup \infty} \mathcal{X}(O_v) \neq \emptyset,$$

то $\mathcal{X}(O_S) \neq \emptyset$.

Пусть $X(\mathbb{A}_k)$ – пространство аделей X, которое мы предполагаем непустым, и пусть $X(\mathbb{A}_k^S)$ – пространство аделей вне S. На этих пространствах вводится топология, которая отличается от топологии произведения, если X/k не является проективным многообразием.
Сильная аппроксимация вне S выполняется тогда и только тогда, когда диагональное вложение $X(k)$ в $X(\mathbb{A}_k^S)$ является плотным в аделической топологии.
[На проективном многообразии X/k, сильная аппроксимация выполняется вне каждого конечного S тогда и только тогда, когда выполняется слабая аппроксимация.]

Базовый пример : аддитивная группа $\mathbb{G}_a$ над полем k.

Теорема (Eichler, Kneser, Platonov) Пусть G – абсолютно почти простая, односвязная полупростая k-группа. Пусть v – некоторое место. Если группа $G(k_v)$ не является компактной, то сильная аппроксимация вне v выполняется для G.
Пример : $G = SL(D)$, где D – простая центральная алгебра и $v \in S$ - такое место, что $D \otimes_k k_v$ не является алгеброй с делением.

Теорема (Eichler, Kneser) Пусть q – невырожденная квадратичная форма над k от $n \geq 4$ переменных, предположим, что q изотропна над k_v. Тогда для любого $a \in k^\times$ сильная аппроксимация вне $\{v\}$ выполняется для

$$q(x_1, \ldots, x_n) = a.$$

Множество Брауэра-Манина

Благодаря функториальности группы Брауэра, для каждого коммутативного кольца R и каждой R-схемы X существует спаривание

$$X(R) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(R).$$

Выполняются следующие факты.

Предложение. *Пусть* X *– многообразие над локальным полем и* $A \in \mathrm{Br}(X)$. *Отображение вычисления*

$$ev_A : X(k) \to \mathrm{Br}(k) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

является локально постоянным на $X(k)$ *в естественной топологии, индуцированной топологией поля* k.

Предложение. *Пусть* k *– неархимедово локальное поле и* $O \subset k$ *– его кольцо целых элементов. Пусть* $\mathcal{X}$ *– схема над локальным кольцом* $O_v \subset k_v$ *и* $A \in \mathrm{Br}(\mathcal{X})$. *Отображение вычисления*

$$ev_A : \mathcal{X}(O) \to \mathrm{Br}(k) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

является нулевым.

Предложение. *Если* X *– проективное многообразие над числовым полем и* $A \in \mathrm{Br}(X)$, *то почти для каждого места* v, *отображение вычисления* $ev_A : X(k_v) \to \mathrm{Br}(k_v)$ *является нулевым.*

Обобщение :

Предложение. *Пусть* k *– числовое поле,* O *– его кольцо целых элементов,* S *– конечное множество мест, которое содержит все архимедовы места,* O_S *– кольцо* S*-целых элементов. Пусть* $\mathcal{X}$ *– целая схема конечного типа над* O_S *и пусть* $X = \mathcal{X} \times_{O_S} k$*. Пусть* $A \in \mathrm{Br}(X)$*. Почти для всех мест* v *поля* k*, для любого* $P_v \in \mathcal{X}(O_v)$*, выполняется* $A(P_v) = 0$*.*

Для этого предложения существует в некотором роде обратное утверждение.

Предложение (Harari) *Пусть k – числовое поле и X – гладкое связное k-многообразие. Пусть $\mathcal{X}/O$ – целая модель X над открытой подсхемой $Spec(O)$ спектра кольца целых элементов поля k. Пусть $U \subset X$ – открытое подмногообразие X. Для любого элемента $\alpha \in \mathrm{Br}(U)$, который не принадлежит $\mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(U)$, существует бесконечное множество мест v поля k, для которых существует $M_v \in U(k_v) \cap \mathcal{X}(O_v)$, такое, что $\alpha(M_v) \neq 0$.*

Самый простой случай – следующий. Рассмотрим $a \in k^*$, a не является квадратом в k, положим $X = \mathbb{A}^1_k = Spec(k[t])$, U – открытое подмногообразие, заданное условием $t \neq 0$, и $\alpha \in \mathrm{Br}(k(t))$ – класс алгебры кватернионов (a, t). Существует бесконечное множество мест v, для которых существует элемент $t_v \in k_v^*$, такой, что $(a, t_v) \neq 0 \in \mathrm{Br}(k_v)$.

Используя комбинаторное рассуждение, можно доказать следующее очень полезное утверждение.

Предложение (Harari, “Формальная лемма”) *Пусть k – числовое поле и X – гладкое и геометрически связное k-многообразие. Пусть $U \subset X$ – непустое открытое подмногообразие, и пусть $B \subset \mathrm{Br}(U)$ – конечная подгруппа. Пусть $\{P_v\} \in U(\mathbb{A}_k)$. Предположим, что для любого α из конечной группы $B \cap \mathrm{Br}(X)$ выполняется*

$$\sum_{v \in \Omega} \alpha(P_v) = 0.$$

Тогда для любого конечного множества мест S поля k существует адель $\{M_v\} \in U(\mathbb{A}_k)$, такая, что $M_v = P_v$ для $v \in S$ и для любого $\beta \in B$ выполняется

$$\sum_{v \in \Omega} \beta(M_v) = 0.$$

Пусть X – гладкое целое k-многообразие. Предыдущие утверждения (прямые) показывают, что для любого $A \in \mathrm{Br}(X)$ отображение

$$\theta_A : X(\mathbb{A}_k) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

заданное как

$$\{P_v\} \to \sum_{v \in \Omega} i_v(A(P_v)),$$

определено корректно (это конечная сумма для каждой адели), и что его ядро $Ker(\theta_A)$ (точки с нулевым образом) открыто и замкнуто в $X(\mathbb{A}_k)$.

Таким образом, можно ввести определение

$$X(\mathbb{A}_k)^{Br} =: \bigcap_{A \in \mathrm{Br}(X)} Ker(\theta_A).$$

Это множество Брауэра-Манина X. Оно является замкнутым в $X(\mathbb{A}_k)$.
По обобщённому закону взаимности,

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{Br} \subset X(\mathbb{A}_k).$$

Замыкание $X(k)$ в $X(\mathbb{A}_k)$ (по аделической топологии) находится в $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$.

Рациональные точки : препятствие Брауэра-Манина, принцип Хассе и слабая аппроксимация

Пример Линда с точки зрения препятствия Брауэра-Манина

Уравнение

$$2y^2 = x^4 - 17 \neq 0$$

определяет открытое подмногообразие U гладкой проективной кривой $X/\mathbb{Q}$.

Имеем $\prod_{p \cup \infty} X(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$.

Упражнение: алгебра кватернионов $(y, 17) \in \mathrm{Br}(U)$ является ограничением некоторого класса $A \in \mathrm{Br}(X)$.

Образ отображения $ev_A : X(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является нулевым если $p \neq 17$.

Для $p = 17$ образ $ev_A : X(\mathbb{Q}_{17}) \to \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_{17}) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ равен $\{1/2\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Значит, $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Пример Исковского с точки зрения препятствия Брауэра-Манина

Пусть $c \in \mathbb{Z}, c > 0, c$ – нечётное. Уравнение

$$y^2 + z^2 = (c - x^2)(x^2 - c + 1) \neq 0$$

определяет открытое подмногообразие U_c гладкой проективной поверхности $X_c/\mathbb{Q}$.

Имеем $\prod_{p \cup \infty} X_c(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$.

Алгебра кватернионов $(c - x^2, -1) \in \mathrm{Br}(U_c)$ продолжается на $A \in \mathrm{Br}(X_c)$.

$$y^2 + z^2 = (c - x^2)(x^2 - c + 1) \neq 0$$

Для $p \neq 2$ образ

$$ev_A : X_c(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

равен нулю.
Для $p = 2$ получаем $\{1/2\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $c \equiv 3(4)$.
Значит: *если $c \equiv 3(4)$, то $X_c(A_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}(X)} = \emptyset$, откуда $X_c(\mathbb{Q}) = \emptyset$.*
Аналогично: *если $c \equiv 1(4)$, то $X_c(A_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}(X)} \neq \emptyset$.*

Теорема *Если $c \equiv 1(4)$, то $X_c(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$.*
(частный случай теоремы CT, Coray et Sansuc, 1981)

Пусть X – гладкое *проективное* геометрически целое k-многообразие.
Говорят, что слабая аппроксимация на X выполняется при условии Брауэра-Манина, если замыкание $X(k)$ в $X(\mathbb{A}_k)$ совпадает с $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$.
Это утверждение содержит следующее свойство : если $X(\mathbb{A}_k)^{Br} \neq \emptyset$, то $X(k) \neq \emptyset$, то есть препятствие Брауэра-Манина к принципу Хассе для рациональных точек является единственным препятствием для существования рациональной точки.

Теорема (Sansuc, Borovoi) Пусть X – гладкое проективное целое k-многообразие, которое содержит открытое подмногообразие U однородного пространства линейной алгебраической k-группы со связными геометрическими стабилизаторами. Тогда $X(k)$ плотно в $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$.

Доказательства используют :

Принцип Хассе для главных однородных пространств односвязных полупростых групп (Kneser, Harder, Chernousov)

Теорию полей классов : дуальность Тейта-Накаямы для торов.

Гипотеза (CT-Sansuc) Пусть k – числовое поле. Если X – гладкая проективная (геометрически) рациональная k-поверхность, то $X(k)$ плотно в $X(\mathbb{A}_k)^{Br}$. В частности, если $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$, то выполняются принцип Хассе и слабая аппроксимация.

Гипотеза известна для $y^2 - az^2 = P(x)$, где $P(x)$ – многочлен степени 3 или 4 (CT-Sansuc-Swinnerton-Dyer).

Существуют по сути два семейства таких поверхностей : поверхности, расслоенные на коники над коникой, и поверхности Дель Пеццо, в числе которых – гладкие кубические поверхности.

Были проведены различные численные тесты для кубических поверхностей
$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0,$$
где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, без кубического делителя.
Если у такой поверхности $X/\mathbb{Q}$ есть точки во всех $\mathbb{Q}_p$, и если существует простое число p, которое делит только одно из чисел a, b, c, d, то $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{Br} \neq \emptyset$ (CT-Kanevsky-Sansuc 1987).

Гипотеза CT-Sansuc о рациональных точках поверхностей, расслоенных на коники, следует из гипотезы BDS.

Версия гипотезы для нуль-циклов доказана для поверхностей, расслоенных на коники (Salberger).

Пример 1. Пусть $P(x) = P_1(x).P_2(x)$ – произведение двух неприводимых взаимно простых многочленов *чётных* степеней и пусть $a \in k^\times$. Пусть Y – гладкая поверхность, заданная уравнением $y^2 - az^2 = P(x)$, и пусть X – гладкая k-компактификация Y. Докажите, что алгебра кватернионов $A = (a, P_1(x))$ принадлежит $\mathrm{Br}(X)$ и порождает $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$. Если на X нет препятствия Брауэра-Манина, то существует элемент $c \in k^\times$, такой, что у системы уравнений

$$y_1^2 - az_1^2 = c.P_1(x), \;\; y_2^2 - az_2^2 = c^{-1}.P_1(x)$$

есть решения во всех k_v.

Существование решения в k для такой системы следует из условия, что P_1 и P_2 являются неприводимыми и из гипотезы BDS. Такое решение также даёт решение для $y^2 - az^2 = P(x)$.

Пример 2. Пусть $P(x) = P_1(x).P_2(x)$ – произведение двух неприводимых взаимно простых многочленов *нечётных* степеней и пусть $a \in k^\times$. Если поверхность Y, заданная уравнением $y^2 - az^2 = P(x)$, имеет точки во всех k_v, то существует элемент $c \in k^\times$, такой, что у системы уравнений

$$y_1^2 - az_1^2 = c.P_1(x), \;\; y_2^2 - az_2^2 = c^{-1}.P_1(x)$$

существуют решения во всех k_v. В доказательстве этого результата используется частный случай формальной леммы. Существование решения в k для такой системы следует из условия, что P_1 и P_2 являются неприводимыми и из гипотезы BDS. Такое решение также даёт решение для $y^2 - az^2 = P(x)$. Докажите, что если X – гладкая проективная модель поверхности Y, то $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$. Алгебра кватернионов $(a, P_1(x) \in \mathrm{Br}(k(X))$ является разветвлённой, она не принадлежит $\mathrm{Br}(X)$.

Существуют гладкие проективные геометрически целые многообразия X/k, такие, что $X(\mathbb{A}_k)^{Br} \neq \emptyset$ и $X(k) = \emptyset$.
Скоробогатов (1999); Poonen (2009).
Были введены новые препятствия (Harari, Скоробогатов), которые объясняют первые примеры.
Но эти препятствия не объясняют вторые (достаточно простые) примеры.
В настоящее время ведутся исследования для использования этальных гомотопий, чтобы определить "высшие" препятствия.

Методы расслоений

Пусть $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ – доминантный морфизм. Если мы контролируем принцип Хассе в слоях, хотя бы при помощи препятствия Брауэра-Манина, что можно сказать обо всём многообразии X ?
Используя "формальную лемму", Harari доказал следующее утверждение.

Теорема (D. Harari 1994)
Пусть $f : X \to \mathbb{P}^1_k$ как задано выше. Предположим, что многообразие X является гладким проективным и геометрически целым. Пусть $K = k(\mathbb{P}^1)$. Предположим :
Для геометрического общего слоя $X_\eta \times_K \overline{K}$ выполняется:
Группа Пикара является свободной группой конечного типа и группа Брауэра тривиальна.
Во всех слоях над замкнутыми точками $\mathbb{A}^1$ существует геометрически неприводимая компонента кратности 1.
У расслоения $X \to \mathbb{P}^1$ существует сечение над $\overline{k}$.
Препятствие Брауэра-Манина для принципа Хассе является единственным в слоях X_t/k для почти всех $t \in \mathbb{P}^1(k)$ (на самом деле, достаточно потребовать выполнение этого условия на множестве Гильберта).
Тогда для всего X препятствие Брауэра-Манина для принципа Хассе является единственным.

Используя эту теорему и один результат для кубических поверхностей, содержащих прямую над k (Salberger, Скоробогатов), полученный ранее, можно доказать слабую аппроксимацию для любой гладкой кубической гиперповерхности в $\mathbb{P}_k^4$, если эта гиперповерхность содержит прямую над k: можно расслоить эту гиперповерхность при помощи $\mathbb{P}^3$, содержащих заданную прямую.

Если гипотеза о препятствии Брауэра-Манина для кубических поверхностей верна, то из этой теоремы следует, что принцип Хассе и слабая аппроксимация выполняются для кубических гиперповерхностей в $\mathbb{P}_k^n$ для $n \geq 4$. Группа Брауэра таких гиперповерхностей совпадает с $\mathrm{Br}(k)$.

Целые точки : препятствие Брауэра-Манина, принцип Хассе и сильная аппроксимация

Пусть X – гладкое геометрически целое k-многообразие над числовым полем k. Пусть $S \subset \Omega$ конечное *непустое* множество. Говорят, что на X выполняется **сильная аппроксимация вне S при условии Брауэра-Манина**, если выполняется следующее свойство.

Для любого конечного множества мест T, которое содержит S и архимедовы места и для любого семейства непустых открытых подмножеств $U_v \subset X(k_v)$, где $v \in T \setminus S$, и для любой O_T-схемы конечного типа $\mathcal{X}/O_T$, которая является моделью X/k, т.е. $\mathcal{X} \times_{O_T} k \simeq X$, если множество

$$[\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S} U_v \times \prod_{v \notin T} \mathcal{X}(O_v)]^{\mathrm{Br}(X)}$$

непусто, то в этом множестве существует точка из $X(k)$ (и, значит, из $\mathcal{X}(O_T)$).

• Если сильная аппроксимация вне S при условии Брауэра-Манина выполняется для S, то она также выполняется для любого S', такого, что $S \subset S'$.

• Если $X' \to X$ – собственный бирациональный морфизм гладких многообразий, то сильная аппроксимация вне S при условии Брауэра-Манина выполняется для X тогда и только тогда, когда она выполняется для X'.

Теорема (CT-Xu) *Пусть $U \subset X$ открытое подмногообразие гладкого геометрически целого многообразия X. Пусть S – конечное множество мест. Предположим, что $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Если $\mathrm{Br}(U)/\mathrm{Br}(X)$ конечно, и если сильная аппроксимация вне S при условии Брауэра-Манина выполняется для U, тогда она выполняется для X.*

[используется формальная лемма Harari.]

В контрпримерах для сильной аппроксимации, рассмотренных в самом начале, имеем $k = \mathbb{Q}$, $S = \infty$, $\mathcal{X}$ над $\mathbb{Z}$, и можно доказать :

$$[X(\mathbb{R}) \times \prod_{p \neq \infty} \mathcal{X}(\mathbb{Z}_p)]^{\mathrm{Br} X} = \emptyset,$$

значит (закон взаимности) $\mathcal{X}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

В примере Борового-Рудника $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$

$$(y-x)(9x+7y)=1-2z^2$$

используется класс алгебры кватернионов $(y-x,2)=(9x+7y,2)\in\mathrm{Br}(X)$.

В тривиальном примере $\{2x-5y=1, xt=1\}$ над $\mathbb{Q}$, можно использовать алгебру кватернионов $(x,5)$. Можно доказать, что у уравнения нет целых решений в расширении $K/\mathbb{Q}$ нечётной степени, неразветвлённом и полностью разложимом в 2-х и 5-ти.

Сильная аппроксимация вне S выполняется при условии Брауэра-Манина для :

X/k однородное пространство связной линейной алгебраической группы G/k, со связными геометрическими стабилизаторами, при некотором условии некомпактности в местах S.

CT и Xu 2005-2009 (G односвязная полупростая группа); Harari 2008 (G коммутативная связная группа); Demarche 2011 (произвольные группы); Borovoi и Demarche (однородные пространства, общий случай).
Если G – односвязная полупростая группа, то $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ является конечным. Это не выполняется если G – k-тор, например, $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ является бесконечным для X заданного условием $x^2 - ay^2 = b$.

Доказательства используют :

Принцип Хассе для главных однородных пространств односвязных полупростых групп (Kneser, Harder, Chernousov)

Теорию полей классов: дуальность Тейта-Накаямы для торов и некоммутативное обобщение (Kottwiz), обобщение теорем дуальности для комплексов торов (Demarche)

Сильную аппроксимацию вне S для полупростых групп, при условии некомпактности.

Самый простой интересный случай

Пусть Y – k-многообразие, заданное условием $q(x, y, z) = c$, где q – невырожденная квадратичная форма от трёх переменных и $c \in k^{\times}$. Предположим, что $Y(k) \neq \emptyset$.

Это – однородное пространство для действия группы спиноров формы q, стабилизаторы являются торами размерности 1.

Пусть $d = -c.\mathrm{det}(q)$.

Если $d \in k^{\times 2}$, то $\mathrm{Br}(Y)/\mathrm{Br}(k) = 0$.

Если $d \notin k^{\times 2}$, то $\mathrm{Br}(Y)/\mathrm{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$, порождается элементом $\xi \in \mathrm{Br}(Y)$ порядка 2 вида $(l(x, y, z), d)$, где $l(x, y, z)$ – подходящая аффинная линейная форма (которая задаёт касательное пространство в k-точке).

Если k – числовое поле и S – конечное множество, которое содержит место v, такое, что q изотропна в v, то сильная аппроксимация выпоняется вне S при условии Брауэра-Манина, которое сводится к условию, определённому элементом ξ.

Вычисления

• Если k_v – произвольное локальное поле, $Y(k_v) \neq \emptyset$ и $d \notin k^{\times 2}$, ξ принимает только одно значение на $Y(k_v)$ тогда и только тогда, когда v – действительное место и форма q – анизотропна на k_v.

• Если k_v – p-адическое и недиадическое поле, q – невырожденная квадратичная форма над o_v и $c \in o_v$, если $d = -c.\mathrm{det}(q)$ не является квадратом, то ξ принимает два различных значения в точках $(x, y, z) \in Y(o_v)$, $(x, y, z) = 1$ (примитивные точки) тогда и только тогда, когда $v(c)$ нечётно.

Приложение.
Endliche Anzahl von Spinorausnahmen (M. Kneser, A. Weil)

Пусть $q(x, y, z) \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ неопределённая форма. Если $c \in \mathbb{Z}$ не принаджежит некоторому конечному множеству $E = E(q) \subset \mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$, то локально-глобальный принцип выполняется для целых решений уравнения

$$q(x, y, z) = c.$$

Пусть k – поле, $q(x, y, z)$ – невырожденная квадратичная форма над k от трёх переменных и $P(t) \in k[t]$ ненулевой многочлен. Обозначим X/k – аффинное многообразие

$$q(x, y, z) = P(t).$$

Если $P(t)$ – сепарабельный многочлен, X – гладкое многообразие. Пусть $U \subset X$ – дополнение к замкнутому подмногообразию $x = y = z = 0$. Многообразие U является гладким. Пусть $\tilde{X} \to X$ – разрешение особенностей X, $U \subset \tilde{X}$.

Для изучения целых точек на таких многообразиях мы будем использовать метод расслоений.

Теорема (CT и Fei XU, 2011)

Если k – числовое поле и v_0 – такое место поля k, что q является изотропной в k_{v_0}, то сильная аппроксимация вне $S = \{v_0\}$ выполняется при условии Брауэра-Манина для любого открытого (в топологии Зарисского) подмногообразия V в X, такого, что $U \subset V \subset \tilde{X}$.

$k = \mathbb{Q}$, S – действительное место.

В общем случае, сильная аппроксимация вне S не выполняется для $\tilde{X}$.
Контрпримеры к локально-глобальному принципу для целых решений

$$(y - x)(9x + 7y) + 2z^2 = (2t^2 - 1)^2.$$

В общем случае, сильная аппроксимация вне S не выполняется для U.
Контрпримеры к локально-глобальному принципу для целых примитивных решений ($(x, y, z) = 1$)

$$x^2 - 2y^2 + 64z^2 = (2t^2 + 3)^2.$$

Сильная аппроксимация вне S выполняется, если многочлен $P(t)$ не является слишком "особенным".

Теорема:

Предположим, что $P(t) \neq c.(r(t))^2$, где $c \in k^\times$. Если k – числовое поле и v_0 – такое место поля k, что форма q является изотропной в k_{v_0}, сильная аппроксимация вне $S = \{v_0\}$ выполняется для любого V открытого (в топологии Зарисского) подмногообразия X, такого, что $U \subset V \subset \tilde{X}$.

Это является частным случаем основной теоремы, так как доказывается, что из условия на $p(t)$ следует, что

$$\mathrm{Br}(\tilde{X})/\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(U)/\mathrm{Br}(k) = 0,$$

значит, условие Брауэра-Манина отсутствует.

Рассмотрим доказательство последней теоремы в частном случае.

Теорема. *Пусть* $q(x, y, z) \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ *– неопределённая квадратичная форма от трёх переменных. Если* $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ *не является произведением константы и квадрата, локально-глобальный принцип выполняется для целых решений уравнения* $q(x, y, z) = P(t)$.

Доказательство. Существует конечное множество S простых чисел, такое, что $q(x, y, z)$ представляет каждый элемент $\mathbb{Z}_p$ если $p \notin S$.
Пусть заданы локальные решения (x_p, y_p, z_p, t_p). Возьмём $t_0 \in \mathbb{Z}$ достаточно близко к t_p для $p \in S$. Тогда существует целое число $r > 0$, такое, что для любого целого числа $m > 0$,

$$P(t_0 + (\prod_{p \in S} p)^r.m)$$

представимо формой $q(x, y, z)$ на каждом из $\mathbb{Z}_p$.

Лемма. *Пусть* $P(t)$ *– многочлен в* $\mathbb{Q}[t]$*, который не является произведением константы и квадрата. Множество значений* $P(m)$ *для* $m \in \mathbb{N}$ *пробегает бесконечное количество классов в* $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$*.* $\square$

Следовательно, можно выбрать $m = m_0$ таким образом, что $P(t_0 + (\prod_{p\in S} p)^r.m_0)$ не принадлежит никакому исключительному классу в $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$. Уравнение

$$q(x,y,z) = P(t_0 + (\prod_{p\in S} p)^r.m_0),$$

у которого есть решения в каждом $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{R}$, тогда имеет решение $(x,y,z) \in \mathbb{Z}$. ЧТД

Предположим теперь, что $P(t) = c.(r(t))^2$, пусть $P(t) = c.\prod_i P_i(t)^{e_i}$, где $P_i \in k[t]$ – неприводимые многочлены и e_i являются чётными.
Пусть $d = -c.det(q)$. Пусть $k_i = k[t]/(P_i)$.
Упражнение.
• Если d является квадратом в k, то $\mathrm{Br}(\tilde{X})/\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(U)/\mathrm{Br}(k) = 0$.
• Если d не является квадратом в k и существует индекс i, такой, что d не является квадратом в k_i, то $\mathrm{Br}(\tilde{X})/\mathrm{Br}(k) = 0$ и $\mathrm{Br}(U)/\mathrm{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$.
• Если d не является квадратом в k, но является квадратом в каждом k_i, то $\mathrm{Br}(\tilde{X})/\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(U)/\mathrm{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$.
• К тому же, для любого $t_0 \in k$, такого, что $p(t_0) \neq 0$, отображение специализации $\mathrm{Br}(U)/\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(U_{t_0})/\mathrm{Br}(k)$ является сюрьективным.

Пусть k – числовое поле. По утверждению, которое мы рассматривали вначале, чтобы доказать теорему для $\tilde{X}$, достаточно это сделать
для U. Пусть $v_0 \in S$, такое, что q изотропно в v_0.
Рассмотрим случай, когда $P(t) = c.(r(t))^2$ и d не является квадратом в k. Тогда $\xi \in \mathrm{Br}(U)$ имеет порядок 2 и порождает $\mathrm{Br}(U)/\mathrm{Br}(k)$.
Предположим, что ξ аннулируется в каждой точке $\{M_v\}$

$$\prod_{v \in S} U(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S} U_v \times \prod_{v \notin T} \mathcal{U}(O_v)$$

где U_v открыто в $U(k_v)$:

$$\sum_v \xi(M_v) = 0.$$

Можно показать, что, возможно, увеличив T, форма q является невырожденной на o_T и что ξ аннулируется на $\mathcal{U}(O_v)$ для $v \notin T$. Каждое M_v можно представить как (x_v, y_v, z_v, t_v). По сильной аппроксимации на k, можно найти целое число t_0 вне T, достаточно близкое к t_v для $v \in T \setminus \{v_0\}$.
Тогда можно заменить каждое M_v для $v \in T$ на P_v, проекция которого равна t_0 (для v_0, используется, что q – изотропная), и который к тому же является достаточно близким к M_v для $v \in T \setminus \{v_0\}$. Для каждого такого v, получаем $\xi(M_v) = \xi(P_v)$. Для каждого $v \notin T$, выберем произвольное P_v в $\mathcal{U}_{t_0}(o_v)$.

Ограничение $\xi \in \mathrm{Br}(U)$ порождает $\mathrm{Br}(U_{t_0})/\mathrm{Br}(k)$.
Имеем:

$$\sum_v \xi(P_v) = \sum_v \xi(P_v) - \sum_v \xi(M_v) = \xi(P_{v_0}) - \xi(M_{v_0}) \in \mathbb{Z}/2.$$

Если d является квадратом в k_{v_0}, то ξ постоянно на $U(k_{v_0})$.
Если d не является квадратом в k_{v_0}, то, так как q изотропна в k_{v_0}, мы видели, что ξ принимает два значения $0, 1 \in \mathbb{Z}/2$ на $U(k_{v_0})$. Если $\xi(P_{v_0}) - \xi(M_{v_0}) \neq 0$, мы меняем P_{v_0}, что является возможным, и таким образом получаем

$$\sum_v \xi(P_v) = 0.$$

Применив теорему сильной аппроксимации вне S при условии Брауэра-Манина для уравнений $q(x, y, z) = a$, находим точку $U_{t_0}(k)$ в следе на U_{t_0} открытого аделического подмножества, заданного вначале. ЧТД

Предыдущие результаты можно обобщить для расслений на однородные пространства полупростых групп (CT-Harari, 2012). Я ограничусь указанием следующего случая.

Теорема *Пусть X – открытое подмногообразие, где аффинное k-многообразие Y, заданное уравнением*

$$\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = p(t),$$

$a_i(t)$ и $p(t)$ в $k[t]$ – попарно взаимно простые многочлены, является гладким.
Пусть v_0 – место k.
(i) Если коника, заданная уравнением $\sum_{i=0}^{2} a_i(t)x_i^2 = 0$ над полем $k(t)$ имеет рациональную точку в $k_{v_0}(t)$, то сильная аппроксимация вне v_0 при условии Брауэра-Манина выполняется для X.
(ii) Если к тому же произведение $p(t).\prod_i a_i(t)$ является сепарабельным многочленом, то $X = Y$ и сильная аппроксимация выполняется для X вне v_0 : диагональный образ $X(k)$ является плотным в $X(\mathbb{A}_k^{v_0})$.

Для произвольных схем над $\mathbb{Z}$, условия Брауэра-Манина не являются достаточными для существования целой точки.
Простой пример.
$\mathcal{X}/\mathbb{Z}$ заданное в $\mathbb{A}^4_{\mathbb{Z}}$ уравнением

$$(16x^2 + 9y^2 - 3z^2).t = 1$$

Решения $\{M_p\} \in \prod_p \mathcal{X}(\mathbb{Z}_p)$ удовлетворяют условиям Брауэра-Манина, но $\mathcal{X}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.
Целое этальное препятствие Брауэра-Манина (аналог препятствия для рациональных точек, которое объясняет пример Скоробогатова).