Что такое закон взаимности? 3/8/2011

К. Конрад Задание 3

1. (a) Докажите эквивалентность следующих двух вариантов квадратичного закона взаимности:

   - Вариант Эйлера/Гаусса (см. первое задание).
   - Вариант Артина: для любого ненулевого целого d существует групповой гомоморфизм $\chi_d\colon (\mathbf{Z}/4d\mathbf{Z})^\times \to \{\pm 1\}$ такой что
   $$\chi_d(p \bmod 4d) = \left(\frac{d}{p}\right)$$
   для всех простых p, которые не делят $4d$.

   (Подсказка: для Эйлер/Гаусса $\Rightarrow$ Артин: закон взаимности символа Якоби – следствие варианта Эйлера/Гаусса. См. начало задачи No. 12 в первом задании. Для Артин $\Rightarrow$ Эйлер/Гаусс: сведите к доказательству того, что $\chi_d(-1) = \operatorname{sign}(d)$. Вычислите число $\chi_d(-1) = \chi_d(4|d|-1)$, используя разложение числа $4|d|-1 \geq 3$ на простые, Вы можете предполагать, что дополнительный закон символа Якоби $(\frac{-1}{n})$ для положительных нечетных целых n уже доказан т.к. это простое следствие дополнительного закона символа Лежандра $(\frac{-1}{p})$, который легко доказать как независимый результат без общего квадратичного закона взаимности.)

   (b) Следствие закона взаимности символа Якоби состоит в том, что $(\frac{d}{n}) = 1$, когда $d \neq 0$ и n положительное целое такое, что $n \equiv 1 \bmod 4d$ (т.к. $(\frac{d}{n}) = (\frac{|d|}{n}) = (\frac{n}{|d|}) = (\frac{1}{|d|}) = 1$). Но *определение* символа Якоби и то, что он мультипликативная функция знаменателя и равен ± 1, когда числитель и знаменатель символа взаимно простые, не требуют знания квадратичного закона взаимности.

   Для ненулевого целого d считайте доказанным то, что $(\frac{d}{n}) = 1$ для всех положительных целых $n \equiv 1 \bmod 4d$. Докажите, что функция $f_d\colon (\mathbf{Z}/4d\mathbf{Z})^\times \to \{\pm 1\}$ заданная формулой $f_d(n \bmod 4d) = (\frac{d}{n})$ для $n > 0$, *корректно определенный* групповой гомоморфизм. Поэтому, из части (a), квадратичный закон взаимности по существу эквивалентен тому, что для всех ненулевых целых d символ Якоби $(\frac{d}{n})$ равен 1 при условии, что $n > 0$ и $n \equiv 1 \bmod 4d$.

2. Используя явные формулы для символа Гильберта, покажите, что $(2,3)_v = (5,-6)_v$ и $(-1,-1)_v = (-2,-3)_v$ для всех $v \in V_{\mathbf{Q}}$. Для каких $v \in V_{\mathbf{Q}}$ выполнено $(2,3)_v = (-2,-3)_v$?

3. (a) Покажите, что $\mathbf{H}(\mathbf{C}) \cong \mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ благодаря изоморфизму такому, что

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad i \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$
$$j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где мы пишем $\mathbf{C} = \mathbf{R} + \mathbf{R}\sqrt{-1}$ для того, чтобы не путать скаляр $\sqrt{-1}$ в $\mathbf{C}$ и кватернион i в $\mathbf{H}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} + \mathbf{C}i + \mathbf{C}j + \mathbf{C}k$.

(b) Для поля F, характеристика которого не равна 2, и $b \in F^\times$, покажите, что $(\frac{1,b}{F}) \cong \mathrm{M}_2(F)$ благодаря изоморфизму такому, что

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \qquad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Проверьте, что $\mathrm{M}_2(F)$ – простое кольцо: его двусторонные идеалы – $\{0\}$ и $\mathrm{M}_2(F)$.

5. (a) Пусть p – нечетное простое число и $a \in \mathbf{Z}$ такое, что $(\frac{a}{p}) = -1$. Покажите, что $p \neq r^2 - as^2$ для всех $r, s \in \mathbf{Q}$. Заключите, что $(\frac{a,p}{\mathbf{Q}})$ – кольцо с делением.

(b) По предыдущей части, кольца $(\frac{-1,3}{\mathbf{Q}})$, $(\frac{2,3}{\mathbf{Q}})$, $(\frac{11,3}{\mathbf{Q}})$ – кольца с делением. Они изоморфны друг другу?

6. (a) Используйте явные формулы для символа Гильберта, чтобы показать, что $(-1,-1)_\infty = (-1,-1)_2 = -1$ и $(-1,-1)_p = 1$ для всех нечетных простых p.

(b) Покажите непосредственно (без использования части a), что невозможно решить $x^2 + y^2 = -1$ для x и y из $\mathbf{Q}_2$. Заключите, что $\mathbf{H}(\mathbf{Q}_2)$ – кольцо с делением.

(c) Для нечетного простого числа p, найдите решение уравнения $x^2+y^2 = -1$ из $\mathbf{Q}_p$ и заключите, что $\mathbf{H}(\mathbf{Q}_p)$ не является кольцом с делением. (Подсказка: во-первых покажите, что возможно решить сравнение $x_0^2 + y_0^2 \equiv -1 \bmod p$. После этого используйте лемму Гензеля.)

7. Если F – поле *характеристики* 2 и $a, b \in F^\times$, то возможно определить F-алгебру

$$\left(\frac{a, b}{F}\right) = F + Fi + Fj + Fk,$$

где $i^2 = a$, $j^2 = b$, и $k = ij = -ji$. Является ли она F-центральной алгеброй? Простой алгеброй?