Группы Галуа в алгебраической геометрии.

Фёдор Богомолов

У каждого поля K имеется сепарабельное замыкание $\bar{K}$, являющееся объединением конечных сепарабельных расширений поля K, так что каждый элемент $x \in \bar{K}$ содержится в некотором конечном расширении K. Сепарабельное замыкание $\bar{K}$ является расширением Галуа поля K, в частности определена группа Галуа автоморфизмов $\bar{K}$, действующих тривиально на K. Эта группа действует как группа Галуа конечного расширения на каждом конечном подрасширении Галуа F поля K. Группа $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ является проконечной компактной группой с топологией, определённой сюръективными отображениями на $\mathrm{Gal}(F/K)$ для всех конечных расширений Галуа поля K. Эта группа имеет множество удивительных (и часто непонятных) свойств. Однако в большинстве случаев это большая неабелева группа, являющаяся очень трудной для изучения.

В этих лекциях я буду в основном рассматривать два типа фактор-групп группы $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Первый фактор — это про-l-компонента абелева фактора $G^{ab}(K) = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)/([\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)])$, второй — его центральное расширение $G^c(K) = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)/([[\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)], \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)])$. В отличие от $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, элементы групп $G^{ab}(K)$ и $G^c(K)$ имеют явное описание, если K содержит корни из единицы. Такое описание даётся теорией Куммера циклических расширений и теорией Меркурьева–Суслина функтора $K_2(K)$ соответственно. С другой стороны, группа $G^c(K)$ определяет большую часть бирациональных инвариантов поля K. В лекциях я опишу структуру группы $G^c(K)$ и её связь с геометрией алгебраических многообразий.