Топология, лекция 9: теорема Тихонова

Миша Вербицкий

15 июня, 2012

матфак ВШЭ

Топология произведения (повторение)

Пусть M - некоторое множество, а $\mathfrak{I}$ – набор индексов (не обязательно конечный или счетный). Обозначим за $M^{\mathfrak{I}}$ произведение M на себя $\mathfrak{I}$ раз.

Если $\alpha \in \mathfrak{I}$, обозначим за $\pi_\alpha : M^{\mathfrak{I}} \to M$ проекцию из $M^{\mathfrak{I}}$ на компоненту с индексом α.

Для набора индексов $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathfrak{I}$, обозначим за $\pi_{\alpha_1,...,\alpha_n} : M^{\mathfrak{I}} \to M^n$ проекцию $M^{\mathfrak{I}}$ на произведение компонент с индексами $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Утверждение: Пусть M – топологическое пространство, а $\mathcal{U}$ - слабейшая топология на $M^{\mathfrak{I}}$, в которой непрерывны все проекции π_α. Тогда $\mathcal{U}$ **задается предбазой вида**

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U) \quad | \quad \alpha \in \mathfrak{I}, U \subset M, \quad U \textbf{ открыто}\}.$$

Кроме того, $\mathcal{U}$ **задается базой вида**

$$\{\pi_{\alpha_1,...,\alpha_n}^{-1}(U_1 \times U_2 \times ... \times U_n) \quad | \quad \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathfrak{I}, \quad U_i \subset M, \quad U_i \textbf{ открыты}\}.$$

■

Определение: Такая топология на $M^{\mathfrak{I}}$ называется **тихоновской**, или **топологией произведения**.

Идеалы в кольцах

Все кольца в этой лекции предполагаются коммутативными (с коммутативным умножением) и с единицей.

Определение: **Идеалом** в кольце R называется подмножество $I \subset R$, которое является подгруппой по сложению, и к тому же удовлетворяет следующему. Для каждого $x \in R, \gamma \in I$, произведение $x\gamma$ также лежит в I. Это свойство записывается так: $RI \subset I$.

Определение: Пусть R – кольцо, а $I \subsetneq R$ – идеал. Идеал I называется **максимальным**, если не существует идеала I_1 с $I \subsetneq I_1 \subsetneq R$.

Утверждение: **Идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда факторкольцо R/I – поле.**

Теорема: **Пусть $I \subsetneq R$ – идеал в кольце. Тогда существует максимальный идеал $I_1 \supset I$.**

Характеристические функции

Определение: Пусть $\nu \subset M$ - подмножество M. Рассмотрим функцию $\chi_\nu : \ M \to \{0,1\}$, ставящую в соответствие точке $x \in \nu$ 1, а $x \notin \nu$ – 0. Эта функция называется **характеристической функцией** подмножества $\nu \subset M$. Отождествив $\{0,1\}$ с полем $\mathbb{F}_2$ остатков по модулю 2, можно считать, что χ_ν – функция со значениями в $\mathbb{F}_2$.

Замечание: Эта конструкция отождествляет 2^M с множеством функций $M \to \mathbb{F}_2$.

Определение: Пусть $A, B \subset M$ – подмножества M. Определим **симметрическую разность** $A \triangle B$ формулой

$$A \triangle B := (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Утверждение: При отождествлении подмножества с его характеристической функцией, **произведение переходит в пересечение, сумма в симметрическую разность.** Для любых $\nu, \rho \subset M$, имеем

$$\chi_\nu + \chi_\rho = \chi_{\nu \triangle \rho}, \qquad \chi_\nu \cdot \chi_\rho = \chi_{\nu \cap \rho},$$

Кольцо подмножеств

Определение: Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств M. Говорится, что S **замкнут относительно конечных пересечений и симметрических разностей**, если пересечение и симметрическая разность любых элементов S снова лежит в S.

Определение: Если S замкнуто относительно конечных пересечений и симметрических разностей, и к тому же содержит M, мы говорим, что S – **кольцо подмножеств** M.

Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств M. Для каждого $a \in S$, рассмотрим его характеристическую функцию $\chi_a : M \to \mathbb{F}_2$. Такие функции можно складывать и умножать почленно.

Утверждение: Множество функций

$$R_S := \{\chi_a : M \to \mathbb{F}_2 \mid a \in S\}$$

образует кольцо относительно поточечного сложения и умножения тогда и только тогда, когда S – кольцо подмножеств M.

Максимальные идеалы в кольце подмножеств

Утверждение: Пусть $S \subset 2^M$ – кольцо подмножеств, а $I \subset S$ – максимальный идеал. Тогда S/I это поле $\mathbb{F}_2$.

Доказательство.
Шаг 1: Легко видеть, что все элементы R_S удовлетворяют $a^2 = a$ (такие элементы называются **идемпотентами**). Поэтому **все элементы k – тоже идемпотенты.**

Шаг 2: Теорема Безу утверждает, что многочлен $P(x)$ степени i имеет не больше i корней в поле k. **Поскольку все элементы k являются корнями квадратного многочлена $x^2 - x = 0$, k – поле из двух элементов.** ■

Следствие: Пусть $I \subset 2^M$ – максимальный идеал, а $A \subset M$ – любое подмножество. Тогда **либо A, либо $M \backslash A$ принадлежат I.**

Доказательство: Пусть $I \subset R$ идеал в кольце такой, что $R/I \cong \mathbb{F}_2$. Тогда для каждого $x \in R$, либо x, либо $1 + x$ лежат в I. Теперь воспользуемся $M \backslash A = M \triangle A = 1 + A$. ■

Ультрафильтры

Следствие: Пусть $I \subset 2^M$ – максимальный идеал, а $A \subset M$ – любое подмножество. Тогда **либо A, либо $M\backslash A$ принадлежат I.**

Доказательство: Пусть $I \subset R$ идеал в кольце такой, что $R/I \cong \mathbb{F}_2$. Тогда для каждого $x \in R$, либо x, либо $1+x$ лежат в I. Теперь воспользуемся $M\backslash A = M \triangle A = 1 + A$.

Определение: Пусть M – множество, 2^M – кольцо всех подмножеств M, а I – максимальный идеал в 2^M. **Ультрафильтром** на M называется множество всех $X \subset M$, не лежащих в I.

Аксиоматическое определение ультрафильтра.
Набор подмножеств $\mathcal{U} \subset 2^M$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда выполнено следующее

1. если $A \subset B$, $A \in \mathcal{U}$, то $B \in \mathcal{U}$.

2. Для любого $A \subset M$, либо A, либо $M\backslash A$, но не оба, лежат в $\mathcal{U}$.

3. Если $A, B \in \mathcal{U}$, то $A \cap B \in \mathcal{U}$.

Henri Cartan, 1996

(род. 8 июля 1904)

Покрытия и идеалы

Утверждение: Пусть M – топологическое пространство, а $\mathcal{V} \subset 2^M$ – покрытие M. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathcal{V}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Из $\mathcal{V}$ можно выбрать конечное подпокрытие

2. $I = 2^M$.

Доказательство. Шаг 1: Если $U_1, ...U_n$ – конечное подпокрытие, то объединение $\bigcup U_i = M$ выражается через пересечения и симметрические разности, значит, $M \in I$.

Шаг 2: Если же $I = 2^M$, имеем $1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i$, где $\lambda_i \in 2^M$, а $U_i \in \mathcal{V}$. Поэтому

$$M = (\lambda_1 \cap U_1) \triangle (\lambda_2 \cap U_2) \triangle ... \triangle (\lambda_n \cap U_n) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i,$$

значит, в $\mathcal{V}$ найдется конечное подпокрытие. ∎

Теорема Александера о предбазе

Теорема Александера о предбазе: Пусть M – топологическое пространство с предбазой $\{U_\alpha\}$. **Предположим, что любое покрытие M элементами $\{U_\alpha\}$ имеет конечное подпокрытие. Тогда M компактно.**

Доказательство: Пусть M некомпактно, и пусть $\mathcal{P}$ – покрытие M, не допускающее конечного подпокрытия. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathcal{P}$. Пусть $I_m \subsetneq 2^M$ – максимальный идеал, содержащий I. **Нам нужно доказать, что $I = 2^M$,** для этого достаточно убедиться, что $I_m = 2^M$.

Шаг 1: Обозначим за $\mathcal{U}$ множество элементов предбазы $\{U_\alpha\}$, содержащихся в I_m. **Докажем, что $\mathcal{U}$ – это покрытие M.** По условию, I_m содержит открытое покрытие M. Поэтому для для каждой точки $x \in M$, и каждой базы топологии на M, найдется элемент базы, который содержит x и содержится в I_m. Получаем $x \in \bigcap_i U_i \in I_m$, где U_i лежат в предбазе. Поскольку I_m – простой идеал, из этого следует, что хотя бы один из U_i лежит в I_m. Мы получили $x \in U_i \in \mathcal{U}$.

Шаг 2: Поскольку $I_m \neq 2^M$, а $\mathcal{U} \subset I_m$, **никакой конечный набор элементов $\mathcal{U}$ не дает в объединении M.** Противоречие с условием теоремы!

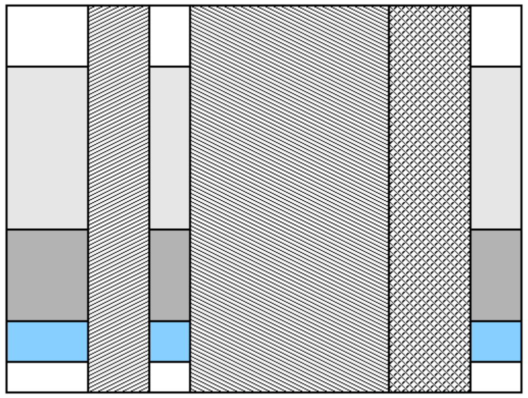
■

James Waddell Alexander
(1888 - 1971)

Теорема Тихонова о компактности

Теорема Тихонова о компактности:
Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор компактных топологических пространств. **Тогда $\prod_\alpha M_\alpha$ тоже компактно.**

Доказательство: Применим теорему Александера о предбазе.



Пусть $\{\mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}}\}$ – набор элементов предбазы. Легко видеть, что

$$\bigcup_{\alpha,\xi} \mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha,W_\alpha},$$

где $W_\alpha = \bigcup_\xi U_{\alpha,\xi}$. Поэтому для какого-то α, $W_\alpha = M_\alpha$. Выбрав из $U_{\alpha,\xi}$ конечное подпокрытие U_i, получим, что $\mathcal{F}_{\alpha,U_i}$ - конечное покрытие $\prod_\alpha M_\alpha$.
■

Дальнейшее развитие: гомотопическая топология.

Определение: Пусть $f_0, f_1 : X \to Y$ – непрерывные отображения. **Гомотопией** f_0 в f_1 называется непрерывное отображение $f: X \times [0,1] \to Y$ такое, что $f|_{X\times\{0\}} = f_0$, $f|_{X\times\{1\}} = f_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Гомотопные отображения - отображения, которые можно непрерывно продеформировать одно в другое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гомотопически эквивалентные пространства** суть топологические пространства X, Y, такие, что заданы непрерывные отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$, причем fg и gf гомотопны тождественным отображениям Id_X, Id_Y.

Гомотопическая топология изучает пространства с точностью до гомотопической эквивалентности.

Дальнейшее развитие: учебники

Учебники: Гомотопическая топология:

Хатчер А. Алгебраическая топология, (М.: МЦНМО, 2011)
В. В. Прасолов. Элементы теории гомологий (М.: МЦНМО, 2006)
А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии (М.: Наука, 1989)

Учебники: дифференциальная геометрия и дифференциальная топология. Анализ на многообразиях.

Дж. Милнор, А. Уоллес Дифференциальная топология. Начальный курс (М.: Мир, 1968)

Учебники: метрическая геометрия. Геометрическая теория групп.

Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В., Курс метрической геометрии, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

Учебники: Эргодическая теория. Геометрия пространств с мерой.

Я.Г. Синай, Введение в эргодическую теорию (М. : ФАЗИС, 1996).

Курс в НМУ/Вышке: синопсис

Гиперболические группы по Громову

Еще в 1950-е А. Д. Александрову удалось выразить важное геометрическое свойства риманова многообразия - знак его кривизны - в виде неравенств для метрики на многообразии, которые имеют смысл в любом метрическом пространстве. Впоследствии эти неравенства были названы CAT-неравенствами, в честь Картана, Александрова и его ученика Топоногова. В работах Александрова и его школы (Громов, Бураго, Перельман и др.) этот подход получил множество применений в разных областях геометрии.

Граф Кэли группы с заданным набором образующих, есть граф, вершины которого соответствуют элементам группы, а ребра - элементам, которые отличаются на домножение на образующую. Громов предложил изучать дискретные группы, исходя из геометрических свойств их графа. Оказалось, что "отрицательной кривизне" (в смысле CAT-теории) графа Кэли отвечает весьма широкий класс групп; ныне эти группы называются "гиперболическими по Громову".

В число гиперболических групп входят решетки в группах Ли ранга 1, фундаментальные группы пространств отрицательной кривизны, свободные группы и много других. Также гиперболическими являются случайные группы, для подходящего определения "случайной группы". Громов доказал, что группа, заданная случайным набором k образующих и m соотношений длины $l_1, ..., l_m$, является гиперболической с вероятностью, которая стремится к 1, когда $l_1, ..., l_m$ стремятся к бесконечности.

Гиперболические группы лишены многих патологий, которые затрудняют работу с более общими группами. Например, в гиперболических группах алгоритмически разрешима проблема различения слов, которая (как доказал П. С. Новиков) неразрешима в более общих группах.

Я изложу основы метрической геометрии по Александрову и Громову, определю гиперболические группы, и расскажу про применение методов Громова в теории групп.

Курс в НМУ/Вышке: план

1. Метрические пространства, внутренние метрики, геодезические, теорема Хопфа-Ринова.

2. CAT-неравенства, CAT(0)-пространства, теорема Картана-Адамара.

3. Гиперболические группы, квазиизометрии метрических пространств, основные примеры гиперболических и негиперболических групп.

4. Изопериметрическое неравенство и алгоритмическая разрешимость проблемы различения слов в гиперболических группах.

5. (*) Случайные группы по Громову; гиперболичность случайных групп.

6. (*) Граница гиперболического пространства по Громову и ее свойства. Граница гиперболической группы.

Вопрос к твердо желающим туда ходить:

1. **Где? (НМУ/Вышка)**

2. **Задачи? (формат)**

Курс в НМУ/Вышке: литература

Курс рассчитан на всех желающих, начиная от второго курса. Требуется знакомство с основами топологии (компакты, накрытия, универсальные накрытия, фундаментальная группа) и базовыми понятиями метрической геометрии.

Полезная литература

М. Громов, "Гиперболические группы", Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002

П. де ля Арп, Э. Гис, "Гиперболические группы по Михаилу Громову", 1992, Москва, Мир.

M. Gromov, `http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/4%5B92%5D` "Asymptotic invariants of infinite groups." Geometric group theory. Volume 2 Proc. Symp. Sussex Univ., Brighton, July 14-19, 1991 Lond. Math. Soc. Lecture Notes 182 Niblo and Roller ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993), 1-295.

Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В., Курс метрической геометрии, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 512 стр

Ilya Kapovich and Nadia Benakli, "Boundaries of hyperbolic groups", Combinatorial and Geometric Group Theory, Contemporary Mathematics, vol. 296, 2002, pp. 39-94, `http://www.math.uiuc.edu/~kapovich/PAPERS/bry1.pdf`

Сайты

`http://berstein.wordpress.com/2011/07/03/boundaries-of-hyperbolic-groups/`
Berstein seminar on geometric group theory

`http://www.ihes.fr/~gromov/topics/topic6.html`
Infinite groups: curvature, combinatorics, probability, asymptotic geometry

`http://www.yann-ollivier.org/rech/index`
Yann Ollivier, Random groups and geometric group theory