Топология, лекция 8: Компакты в топологических пространствах

Миша Вербицкий

7 июня, 2012

матфак ВШЭ

Компакты в хаусдорфовом пространстве.

Определение: Топологическое пространство M называется **компактным**, если каждое открытое покрытие M имеет конечное подпокрытие.

Замечание: Замкнутое подмножество компакта очевидно компактно. Обратное, вообще говоря, неверно.

Утверждение:
Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

Доказательство: Пусть $X \subset M$ – компактное подмножество, а z – точка его замыкания, которая не лежит в X. Найдем у каждой точки $x \in X$ окрестность $U_x \ni x$, замыкание которой $\overline{U_x}$ не содержит z. Выберем из U_x конечное подпокрытие. Воспользуемся

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i},$$

получим, что $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ замкнуто и не содержит z.

Компактность и секвенциальная компактность.

Определение: Топологическое пространство M называется **секвенциально компактным**, если каждая последовательность $\{x_i\}$ в M имеет **предельную точку** (точку, в любой окрестности которой содержится бесконечное количество членов $\{x_i\}$).

Замечание: Пусть M – компактное топологическое пространство. Из компактности легко выводится, что **последовательность вложенных, непустых, замкнутых подмножеств**

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$

всегда имеет непустое пересечение.

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите это!**

Замечание: **Из компактности следует секвенциальная компактность.** Действительно, пусть $\{x_i\}$ – последовательность точек M, R_n – множество $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$, а $\overline{R_n}$ – его замыкание. Тогда пересечение $\bigcap_i \overline{R_i}$ непусто. Ясно, что это пересечение состоит из предельных точек последовательности $\{x_i\}$.

Компактность и секвенциальная компактность (продолжение).

Замечание: **Любая непрерывная функция $f: M \to \mathbb{R}$ на секвенциальном компакте принимает максимум и минимум.**

компактность	$\Rightarrow$	секвенциальная компактность	$\Rightarrow$	непрерывные функции достигают минимума и максимума

Замечание: Для метрических пространств, секвенциальная компактность равносильна обычной **(теорема Гейне-Бореля).**

Компакты и нормальные пространства

Теорема: Пусть M – компактное, хаусдорфово топологическое пространство. **Тогда M нормально.**

Доказательство.
Шаг 1. Докажем, что в M выполнена аксиома T3, то есть для каждого замкнутого множества $A \subset M$, и точки $x \notin A$, существуют непересекающиеся окрестности A и x.

Для всех $z \in A$, выберем окрестность $U_z \ni z$, замыкание которой $\overline{U_z}$ не содержит x. Выберем в покрытии $\{U_z\}$ конечное подпокрытие U_i. **Замыкание $\bigcup U_i$ равно $\bigcup \overline{U_i}$, не содержит z.**

Шаг 2. Тот же аргумент позволяет вывести из T3 и компактности T4. Пусть A и B – два непересекающихся замкнутых подмножества M. У каждой точки $z \in A$ есть окрестность U_z, замыкание которой не пересекается с B, в силу T3. Выберем в покрытии $\{U_z\}$ конечное подпокрытие U_i. **Замыкание $\bigcup U_i$ равно $\bigcup \overline{U_i}$ и не пересекается с B.**
Поэтому M нормально.

Вложения компактов.

Чрезвычайно важное наблюдение. Пусть $f: X \to Y$ – непрерывное отображение. Тогда образ компактного подмножества X компактен.

Следствие: Пусть $f: X \to Y$ – непрерывное вложение хаусдорфовых топологических пространств, причем X – компакт. Рассмотрим образ $f(X) \subset Y$ как топологическое пространство, с индуцированной топологией. **Тогда f – гомеоморфизм.**

Доказательство: Образ компакта компактен, значит, образ замкнутого множества замкнут, открытого – открыт.

Следствие: Из нормальности компакта и леммы Урысона следует, что **любой хаусдорфов компакт гомеоморфен подмножеству тихоновского куба**.

Павел Сергеевич Александров
(1896 - 1982)

Открытые, замкнутые, собственные отображения

Определение: Пусть $f: X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств. Отображение f называется **собственным**, если прообраз любого компакта – компакт, **открытым**, если образ любого открытого множества открыт, из **замкнутым**, если образ любого замкнутого множества замкнут.

Замечание: Непрерывное отображение из компакта X в хаусдорфово топологическое пространство Y **собственно**.

СЛЕДСТВИЕ: Непрерывное отображение из компакта X в хаусдорфово топологическое пространство Y **замкнуто**.

Замечание: Отображение проекции $\pi: X \times Y \to Y$ **открыто**.

Определение: Пусть $f: X \to Y$ – непрерывное отображение. Напомним, что для любой точки $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ называется **слоем** f.

Замкнутые отображения с компактными слоями

Теорема: Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое, непрерывное отображение, причем все слои f компактны. **Тогда f – собственное.**

Доказательство: Пусть $K \subset Y$ – компакт. Достаточно убедиться, что $f^{-1}(K)$ – компакт. Заменив Y на K, а X на $f^{-1}(K)$, **можно считать Y компактом.**

Шаг 1: Компактность M равносильна такому свойству. Пусть $\{A_\alpha\}$ – набор замкнутых подмножеств M, такой, что любое конечное подмножество $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \{A_\alpha\}$ имеет общую точку. Тогда все A_α имеют общую точку.

Действительно, отсутствие общей точки у $\{A_\alpha\}$ значит, что $\{M \backslash A_\alpha\}$ это покрытие, а наличие общих точек у $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ значит, что в $\{M \backslash A_\alpha\}$ нет конечного подпокрытия.

Замкнутые отображения с компактными слоями (продолжение)

Шаг 2: Добавив к $\{A_\alpha\}$ все конечные пересечения элементов $\{A_\alpha\}$, получим набор замкнутых подмножеств X, обладающий тем же свойством. Поэтому можно считать, что $\{A_\alpha\}$ **содержит все конечные пересечения своих элементов.**

Шаг 3: Пусть $\{A_\alpha\}$ – набор замкнутых подмножеств в X такой, что любое конечное подмножество $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \{A_\alpha\}$ имеет общую точку. Поскольку Y компактно, а все $f(A_\alpha)$ замкнуты, $\{f(A_\alpha)\}$ **имеет общую точку $y \in Y$.**

Шаг 4: Пусть $y = \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$. Любое конечное пересечение $\bigcap_i A_i$ лежит в $\{A_\alpha\}$, значит, пересекается с $f^{-1}(y)$. В силу компактности $f^{-1}(y)$, из этого следует, что $\{A_\alpha \cap f^{-1}(y)\}$ **имеет общую точку.**

Мы доказали, что X компактен.

Конечные произведения компактов

Теорема: Пусть X, Y – компакты. Тогда $X \times Y$ – компакт.

Замечание: Эта теорема есть частный случай теоремы Тихонова о компактности произвольных произведений компактов.

Замечание: Произведение секвенциальных компактов компактно.

Легко видеть, что слои проекции $\pi: X \times Y \to Y$ компактны. Таким образом, **компактность произведения $X \times Y$ вытекает из следующего утверждения.**

Утверждение:
Пусть $\pi: X \times Y \to Y$ – отображение проекции, причем X компактно. Тогда π замкнуто.

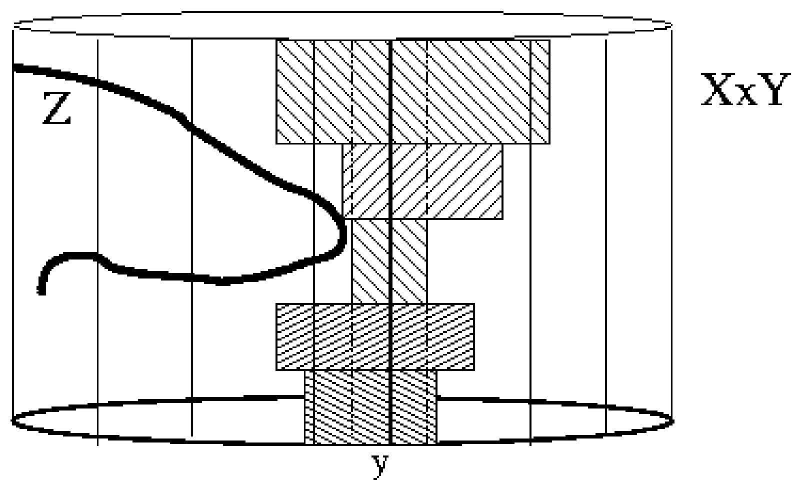
Замечание: Если X некомпактно, это утверждение неверно. Рассмотрим проекцию $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, и гиперболу $Z := \{(x, y) \mid xy = 1\}$. Тогда $\pi(Z)$ незамкнуто.

Замкнутость отображения проекции (доказательство)

Шаг 1. Пусть $Z \subset X \times Y$ – замкнутое подмножество. Если $\pi(Z)$ незамкнуто, для какой-то предельной точки $\pi(Z)$ имеем $\pi^{-1}(y) \cap Z = \emptyset$.

Шаг 2. У каждой точки $(x, y) \in \pi^{-1}(y)$ есть окрестность $U_{x,y} = V_{x,y} \times W_{x,y}$, не пересекающаяся с Z.

Шаг 3. Поскольку $\pi^{-1}(y)$ компактно, можем выбрать конечное покрытие $\{V_i \times W_i\}$ множества $\pi^{-1}(y)$, не пересекающееся с Z.



Шаг 4. Множество $X \times (\bigcap_i W_i)$ не пересекает Z, значит, y не предельная точка $\pi(Z)$. ■

Идеалы в кольцах

Все кольца в этой лекции предполагаются коммутативными (с коммутативным умножением) и с единицей.

Определение: **Идеалом** в кольце R называется подмножество $I \subset R$, которое является подгруппой по сложению, и к тому же удовлетворяет следующему. Для каждого $x \in R, \gamma \in I$, произведение $x\gamma$ также лежит в I. Это свойство записывается так: $RI \subset I$.

Определение: Пусть R – кольцо, а $I \subsetneqq R$ – идеал. Идеал I называется **максимальным**, если не существует идеала I_1 с $I \subsetneqq I_1 \subsetneqq R$.

Утверждение: **Идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда факторкольцо R/I – поле.**

Теорема: **Пусть $I \subsetneqq R$ – идеал в кольце. Тогда существует максимальный идеал $I_1 \supset I$.**

Характеристические функции

Определение: Пусть $\nu \subset M$ - подмножество M. Рассмотрим функцию $\chi_\nu : M \to \{0, 1\}$, ставящую в соответствие точке $x \in \nu$ 1, а $x \notin \nu$ – 0. Эта функция называется **характеристической функцией** подмножества $\nu \subset M$. Отождествив $\{0, 1\}$ с полем $\mathbb{F}_2$ остатков по модулю 2, можно считать, что χ_ν – функция со значениями в $\mathbb{F}_2$.

Замечание: Эта конструкция отождествляет 2^M с множеством функций $M \to \mathbb{F}_2$.

Определение: Пусть $A, B \subset M$ – подмножества M. Определим **симметрическую разность** $A\triangle B$ формулой

$$A\triangle B := (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

Утверждение: При отождествлении подмножества с его характеристической функцией, **произведение переходит в пересечение, сумма в симметрическую разность.** Для любых $\nu, \rho \subset M$, имеем

$$\chi_\nu + \chi_\rho = \chi_{\nu\triangle\rho}, \qquad \chi_\nu \cdot \chi_\rho = \chi_{\nu\cap\rho},$$

Кольцо подмножеств

Определение: Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств M. Говорится, что S **замкнут относительно конечных пересечений и симметрических разностей**, если пересечение и симметрическая разность любых элементов S снова лежит в S.

Определение: Если S замкнуто относительно конечных пересечений и симметрических разностей, и к тому же содержит M, мы говорим, что S – **кольцо подмножеств** M.

Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств M. Для каждого $a \in S$, рассмотрим его характеристическую функцию $\chi_a : M \to \mathbb{F}_2$. Такие функции можно складывать и умножать почленно.

Утверждение: Множество функций

$$R_S := \{\chi_a : M \to \mathbb{F}_2 \mid a \in S\}$$

образует кольцо относительно поточечного сложения и умножения тогда и только тогда, когда S – кольцо подмножеств M.

Максимальные идеалы в кольце подмножеств

Утверждение: Пусть $S \subset 2^M$ – кольцо подмножеств, а $I \subset S$ – максимальный идеал. Тогда S/I это поле $\mathbb{F}_2$.

Доказательство.
Шаг 1: Легко видеть, что все элементы R_S удовлетворяют $a^2 = a$ (такие элементы называются **идемпотентами**. Поэтому **все элементы k – тоже идемпотенты.**

Шаг 2: Теорема Безу утверждает, что многочлен $P(x)$ степени i имеет не больше i корней в поле k. **Поскольку все элементы k являются корнями квадратного многочлена $x^2 - x = 0$, k – поле из двух элементов.** ■

Следствие: Пусть $I \subset 2^M$ – максимальный идеал, а $A \subset M$ – любое подмножество. Тогда **либо A, либо $M \backslash A$ принадлежат I.**

Доказательство: Пусть $I \subset R$ идеал в кольце такой, что $R/I \cong \mathbb{F}_2$. Тогда для каждого $x \in R$, либо x, либо $1 + x$ лежат в I. Теперь воспользуемся $M \backslash A = M \triangle A = 1 + A$. ■

Покрытия и идеалы

Утверждение: Пусть M – топологическое пространство, а $\mathcal{V}\subset 2^M$ – покрытие M. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathcal{V}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Из $\mathcal{V}$ можно выбрать конечное подпокрытие

2. $I = 2^M$.

Доказательство. Шаг 1: Если $U_1, ...U_n$ – конечное подпокрытие, то объединение $\bigcup U_i = M$ выражается через пересечения и симметрические разности, значит, $M\in I$.

Шаг 2: Если же $I = 2^M$, имеем $1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i$, где $\lambda_i\in 2^M$, а $U_i\in\mathcal{V}$. Поэтому

$$M = (\lambda_1\cap U_1)\triangle(\lambda_2\cap U_2)\triangle...\triangle(\lambda_n\cap U_n)\subset \bigcup_{i=1}^n U_i,$$

значит, в $\mathcal{V}$ найдется конечное подпокрытие. ■

Теорема Александера о предбазе

Теорема Александера о предбазе: Пусть M – топологическое пространство с предбазой $\{U_\alpha\}$. Предположим, что любое покрытие M элементами $\{U_\alpha\}$ имеет конечное подпокрытие. Тогда M компактно.

Доказательство: Пусть M некомпактно, и пусть $\mathcal{P}$ – покрытие M, не допускающее конечного подпокрытия. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathcal{P}$. **Пусть $I_m \subset 2^M$ – максимальный идеал, содержащий I.**

Шаг 1: Обозначим за $\mathcal{U}$ множество элементов предбазы $\{U_\alpha\}$, содержащихся в I_m. **Докажем, что $\mathcal{U}$ – это покрытие M.** По условию, I_m содержит открытое покрытие M. Поэтому для для каждой точки $x \in M$, и каждой базы топологии на M найдется элемент базы, который содержит x и содержится в I_m. Получаем $x \in \bigcap_i U_i \in I_m$, где U_i лежат в предбазе. Поскольку I_m – простой идеал, из этого следует, что хотя бы один из U_i лежит в I_m. Мы получили $x \in U_i \in \mathcal{U}$.

Шаг 2: Поскольку $I_m \neq 2^M$, а $\mathcal{U} \subset I_m$, **никакой конечный набор элементов $\mathcal{U}$ не дает в объединении M.** Противоречие с условием теоремы!

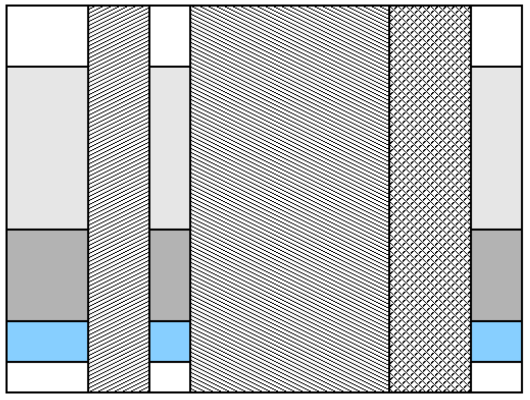
■

James Waddell Alexander
(1888 - 1971)

Теорема Тихонова о компактности

Теорема Тихонова о компактности: Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор компактных топологических пространств. **Тогда $\prod_\alpha M_\alpha$ тоже компактно.**

Доказательство: Применим теорему Александера о предбазе.



Пусть $\{\mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}}\}$ – набор элементов предбазы. Легко видеть, что

$$\bigcup_{\alpha,\xi} \mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}} = \bigcup_\alpha \mathcal{F}_{\alpha,W_\alpha},$$

где $W_\alpha = \bigcup_\xi U_{\alpha,\xi}$. Поэтому для какого-то α, $W_\alpha = M_\alpha$. Выбрав из $U_{\alpha,\xi}$ конечное подпокрытие U_i, получим, что $\mathcal{F}_{\alpha,U_i}$ - конечное покрытие $\prod_\alpha M_\alpha$.

■