Топология, лекция 7: Теорема Урысона о метризации

Миша Вербицкий

1 июня, 2012

матфак ВШЭ

Произведение топологических пространств (повторение)

Пусть M, M' – топологические пространства, а $\mathcal{U} \subset 2^{M\times M'}$ - набор подмножеств $M \times M'$ вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Имеем

$$U_1 \times U_1' \cap U_2 \times U_2' = (U_1 \cap U_2) \times (U_1' \cap U_2'),$$

и поэтому $\mathcal{U}$ замкнут относительно конечных пересечений. Следовательно, **$\mathcal{U}$ – это база топологии на $M \times M'$**

Определение: Рассмотрим $M \times M'$ с топологией, заданной базой открытых множеств вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Это топологическое пространство называется **произведением M_1 и M_2**.

Отображения в $M \times M'$ (повторение).

Замечание: Топология произведения – слабейшая топология на $M \times M'$ такая, что проекции $M \times M' \xrightarrow{\pi} M$, $M \times M' \xrightarrow{\pi'} M'$ непрерывны. Действительно, предбаза топологии на $M \times M'$ порождена прообразами открытых множеств.

Утверждение: Отображение $X \xrightarrow{\varphi} M \times M'$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны композиции $\varphi \circ \pi$, $\varphi \circ \pi'$.

Это задает биекцию

$$\left\{\begin{array}{l}\text{пары непрерывных}\\ \text{отображений}\\ X \xrightarrow{\varphi} M,\ X \xrightarrow{\varphi'} M'\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{непрерывные}\\ \text{отображения}\\ X \to M \times M'\end{array}\right\}$$

Тихоновская топология (повторение)

Обозначения: Map(A,B) – множество всех отображений из A в B

Пусть M - некоторое множество, а $\mathfrak{I}$ – набор индексов (не обязательно конечный или счетный). Обозначим за $M^{\mathfrak{I}}$ произведение M на себя $\mathfrak{I}$ раз.

Замечание: Пространство $M^{\mathfrak{I}}$ естественно отождествляется с Map$(\mathfrak{I}, M)$

Если $\alpha \in \mathfrak{I}$, обозначим за $\pi_\alpha : M^{\mathfrak{I}} \to M$ проекцию из $M^{\mathfrak{I}}$ на компоненту с индексом α.

Для набора индексов $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathfrak{I}$, обозначим за

$$\pi_{\alpha_1,...,\alpha_n} : M^{\mathfrak{I}} \to M^n$$

проекцию $M^{\mathfrak{I}}$ на произведение компонент с индексами $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Гильбертов куб и тихоновский куб (повторение)

Определение: Рассмотрим отрезок $[0,1]$, и пусть $[0,1]^{\mathbb{N}}$ – множество последовательностей точек из $[0,1]$. Для $\{x_i\},\{y_i\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, определим метрику формулой

$$d_h(\{x_i\},\{y_i\}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|^2}{i^2}}$$

Пространство $([0,1]^{\mathbb{N}}, d_h)$ называется **гильбертов куб**.

Определение: Пространство $[0,1]^{\mathbb{N}}$ с топологией произведения называется **тихоновский куб**.

Теорема: Тождественное отображение Id задает гомеоморфизм между тихоновским кубом I_t и гильбертовым кубом I_h.

Нормальные пространства

Определение: Пространство M называется **нормальным**, если любые два непересекающихся замкнутых подмножества имеют непересекающиеся окрестности.

Замечание: Напомним, что **аксиома Хаусдорфа** утверждает что любые две разные точки топологического пространства имеют непересекающиеся окрестности. Если все точки пространства замкнуты, то из нормальности вытекает хаусдорфовость. **Пространство удовлетворяет аксиоме T4, если оно нормально и хаусдорфово.**

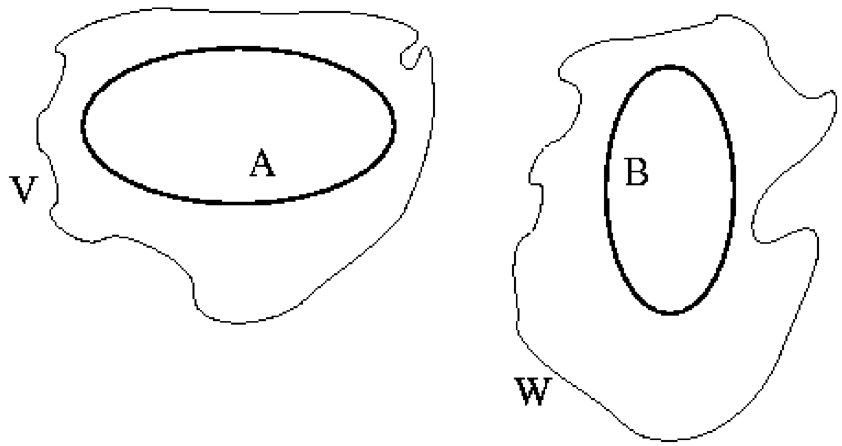
Замечание: **Метрические пространства нормальны.** Непересекающиеся окрестности A и B задаются так:

$$V := \bigcup_{z\in A} B_{\frac{1}{2}d(z,B)}(z), \quad W := \bigcup_{z\in B} B_{\frac{1}{2}d(z,A)}(z).$$

Определение: Пусть $U \subset V$ – два подмножества топологического пространства, причем замыкание U лежит в V. Это отношение обозначается так: $U \Subset V$.

Окрестности, удовлетворяющие $U \Subset V$

Утверждение: Нормальность топологического пространства равносильна следующему свойству. **Пусть $U \supset A$ – окрестность замкнутого множества A. Тогда есть окрестность $V \supset A$ такая, что $V \Subset U$.**



Для доказательства этого, возьмем $B := M\backslash U$, воспользуемся нормальностью, и убедимся, что $\overline{V} \subset M\backslash W$.

Замечание: Пусть $U_0 \Subset U_1$ - два открытых множества в нормальном топологическом пространстве. **Тогда существует открытое $U_{1/2}$, такое, что $U_0 \Subset U_{1/2} \Subset U_1$.** Для доказательства, возьмем $A := \overline{U_0}$, и воспользуемся утверждением выше.

Функции Урысона

Определение: Пусть A, B - непересекающиеся замкнутые множества в топологическом пространстве M. Непрерывная функция $\varphi : \ M \to [0,1]$ называется **функцией Урысона**, если $\varphi\Big|_A = 0$, $\varphi\Big|_B = 1$.

Замечание. В метрическом пространстве функции Урысона существуют для любых замкнутых A и B:

$$\varphi(z) = \min\left(1, \frac{d(x,A)}{d(x,B)}\right).$$

Лемма Урысона:
Топологическое пространство M нормально тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся замкнутых множеств существует функция Урысона.

Замечание: Из существования функции Урысона φ для любых A, B, нормальность M следует немедленно. Действительно, возьмем

$$U := \varphi^{-1}([0,1/3[), \quad V := \varphi^{-1}(]2/3,1]).$$

Доказательство леммы Урысона

Обозначим за U_1 дополнение к B, за U_0 обозначим A. Возьмем $U_{1/2}$ такое, что $U_0 \Subset U_{1/2} \Subset U_1$, потом возьмем $U_{1/4}$ такое, что $U_0 \Subset U_{1/4} \Subset U_{1/2}$ и $U_{3/4}$ такое, что $U_{1/2} \Subset U_{3/4} \Subset U_1$. Воспользуемся индукцией.

Получим, что **для каждого двоично-рационального числа вида $\frac{n}{2^m} \in [0,1]$, задано множество U_λ, открытое при $\lambda > 0$, причем для $\lambda < \mu$, имеем $U_\lambda \Subset U_\mu$.**

Рассмотрим функцию $\varphi: \ U_1 \to [0,1]$

$$\varphi(x) := \inf\{\lambda \mid x \in U_\lambda\}.$$

Доопределим: $\varphi\Big|_B = 1$.

Утверждение: Это функция Урысона.

Условие $\varphi\Big|_A = 0$, $\varphi\Big|_B = 1$ очевидно, осталось проверить непрерывность. Для этого достаточно проверить, что $\varphi^{-1}([0,\alpha[)$ открыто, а $\varphi^{-1}([0,\beta])$ замкнуто.

Доказательство леммы Урысона (продолжение)

По определению, $\varphi^{-1}([0,\alpha[) = \bigcup_{\lambda<\alpha} U_\lambda$

Это множество очевидно открыто.

Доказательство замкнутости $\varphi^{-1}([0,\beta])$.

1. Докажем $\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda$:

$$\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\alpha>\beta} \varphi^{-1}([0,\alpha[) = \bigcap_{\alpha>\beta} \left(\bigcup_{\lambda<\alpha} U_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda.$$

2. Докажем $\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\lambda>\beta} \overline{U_\lambda}$:

Поскольку $U_\lambda \Subset U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}}$, имеем $U_\lambda \subset \overline{U_\lambda} \subset U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}}$. Поэтому

$$\bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda \subset \bigcap_{\lambda>\beta} \overline{U_\lambda} \subset \bigcap_{\lambda>\beta} U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}} = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda.$$

Это множество очевидно замкнуто.

Мы доказали лемму Урысона.

Павел Самуилович Урысон
(1898 - 1924)

Нормальность в пространствах со счетной базой

Определение: Напомним, что M **удовлетворяет аксиоме T6,** если оно хаусдорфово, нормально, и каждое замкнутое подмножество в M получается как пересечение счетного числа своих окрестностей.

Предложение: Любое хаусдорфово, нормальное пространство M со счетной базой удовлетворяет T6.

Доказательство.
Шаг 1: Пусть $\{U_i\}$ - множество всех элементов из счетной базы топологии M таких, что замыкание каждого U_i не пересекается с A. **Из нормальности следует, что $\bigcup_i U_i = M\backslash A$.**

Шаг 2: Возьмем $V_i := M\backslash\overline{U_i}$. Получим

$$\bigcap_i V_i \supset M\backslash\left(\bigcup_i U_i\right) = A$$

Мы получили, что $\bigcap_i V_i = A$.

Нуль-множества

Определение: Пусть $A \subset M$ – замкнутое подмножество M. Оно называется **нуль-множеством**, если существует непрерывная функция $f : M \to [0,1]$ такая, что $A = f^{-1}(0)$.

Замечание: В метрическом пространстве, любое замкнутое множество A является нуль-множеством. В качестве f можно взять функцию $x \to d(x, A)$.

Теорема: Пусть M – нормально, а $A \subset M$ – замкнуто. Тогда следующие условия равносильны: **(a).** A можно получить как пересечение счетного числа открытых окрестностей $W_i \supset A$. **(b).** A – нуль-множество.

Замечание: Нуль-множество очевидно получается как пересечение счетного числа открытых множеств: $\bigcap_i f^{-1}([0, \frac{1}{2^i}[)$.

Замечание: Из этой теоремы следует, что **аксиома T6 для M равносильна тому, что M нормально, хаусдорфово, а всякое замкнутое подмножество M является нуль-множеством.**

Доказательство теоремы о нуль-множестве

Пусть $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset ...$ – последовательность открытых множеств, дающая в пересечении A. **Воспользуемся аргументом, который доказывает лемму Урысона, взяв в качестве B пустое множество.**

Будем строить набор открытых множеств $U_{\frac{m}{2^n}}$, $U_\lambda \Subset U_\mu$, таким образом, чтобы множество $U_{\frac{1}{2^n}}$ содержалось в V_n.

Возьмем U_λ как в доказательстве Урысона, на каждом шаге заменяя $U_{\frac{1}{2^n}}$ на $U_{\frac{1}{2^n}} \cap V_n$. От $U_{\frac{1}{2^n}}$ нам нужно только $A \subset U_{\frac{1}{2^n}} \Subset U_{\frac{1}{2^{n-1}}}$. это условие при такой замене сохраняется.

Получим функцию Урысона $f(x) := \inf\{\lambda \ | \ x \in U_\lambda\}$.

Поскольку $f^{-1}([0, \frac{1}{2^i}[) \subset V_i$, имеем

$$f^{-1}(0) = \bigcap_i f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2^i}\right[\right) \subset \bigcap_i V_i = A.$$

Мы доказали, что A – это нуль-множество.

Теорема Урысона о метризации

Теорема Урысона: Пусть M – нормальное, хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Тогда существует непрерывное, инъективное вложение $M \stackrel{\Phi}{\hookrightarrow} [0,1]^{\mathbb{N}}$ в счетное произведение отрезков. Более того, Φ является гомеоморфизмом M на его образ.

Замечание: Поскольку Φ задает гомеоморфизм M и подмножества метрического пространства (тихоновский куб гомеоморфен гильбертову), **из теоремы Урысона следует, что M метризуемо.**

Замечание: Нормальные, хаусдорфовы пространства со счетной базой называются **польскими**. Из теоремы Урысона следует, что **любое польское пространство метризуемо.**

Замечание: В польском пространстве выполнена аксиома T6, как мы только что доказали. Поэтому **любое замкнутое подмножество польского пространства является нуль-множеством.**

Доказательство теоремы Урысона.

Пусть $\{U_i\}$ – счетная база топологии M, а $A_i := M\backslash U_i$. Тогда A_i – нуль-множества. **Возьмем $f_i : M \to [0,1]$, такая, что $f_i^{-1}(0) = A_i$.** Рассмотрим отображение из M в тихоновский куб:

$$M \stackrel{\prod_i f_i}{\to} [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

Шаг 1. Докажем, что $\Phi := \prod_i f_i$ – вложение. Поскольку U_i это база хаусдорфовой топологии, для любых двух точек $x \neq y$ существует A_i, которое содержит x и не содержит y. Тогда $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Шаг 2. Докажем, что $\Phi := \prod_i f_i$ – гомеоморфизм на его образ. Для этого нужно, чтобы любое открытое множество в M получалось как прообраз $\Phi^{-1}(U)$, для какого-то открытого $U \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$.

Достаточно доказать это для всех открытых множеств U_i из базы. Поскольку $U_i = f_i^{-1}(]0,1])$, имеем

$$U_i = \Phi^{-1}([0,1] \times [0,1] \times \cdots \times]0,1] \times [0,1] \times \cdots \subset [0,1]^{\mathbb{N}})$$

Это множество открыто в $[0,1]^{\mathbb{N}}$.