Топология, лекция 5: Теоретико-множественная топология

Миша Вербицкий

11 мая, 2012

матфак ВШЭ

Топологические пространства.

Феликс Хаусдорф, “Grundzüge der Mengenlehre”, 1914

Определение: Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. Тогда $\mathcal{U}$ **задает топологию** на M, если

- **Любое объединение открытых подмножеств открыто**
- **Конечное пересечение открытых подмножеств открыто**
- **M и пустое множество $\emptyset$ открыты.**

Такое M называется **топологическим пространством**.

Определение: **Замкнутым множеством** называется множество, дополнение которого открыто.

Замечание: Можно было бы выбрать аксиомы, основанные на замкнутости. (i) “пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто”, (ii) “объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто", (iii) “M и пустое множество $\emptyset$ замкнуты".

Простейшие понятия топологии.

Определение: **Окрестностью** подмножества $Z \subset M$ называется любое открытое множество, содержащее Z. **Замыканием** подмножества $Z \subset M$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих Z.

Определение: Подмножество M называется **всюду плотным**, если замыкание его совпадает с . Оно называется **нигде не плотным**, если его замыкание не содержит непустых открытых подмножеств M.

Определение: Отображение $\varphi: \ M \to N$ называется **непрерывным**, если прообраз любого открытого множества открыт.

Определение: **Пределом** $\{x_i\}$ называется такая точка $x \in M$, что в любой окрестности x содержатся почти все элементы $\{x_i\}$.

Предостережение: Предел может быть не единственным.

Определение: **Базой топологии** на M называется набор $\mathcal{U} \subset 2^M$ подмножеств M, состоящий из открытых множеств, и такой, что любое открытое подмножество M получено из элементов $\mathcal{U}$ взятием объединений и конечных пересечений.

Аксиома Хаусдорфа

Определение: Топологическое пространство M называется **отделимым**, или **хаусдорфовым**, если любые две точки $x \neq y \in M$ имеют непересекающиеся окрестности $U \ni x, V \ni y$.

Замечание: В хаусдорфовом топологическом пространстве предел последовательности единственен.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это!

Пример.
Пусть R - кольцо, $\operatorname{Spec}(R)$ - множество его простых идеалов, а $f \in R$ – любой элемент. Обозначим за A_f подмножество в $\operatorname{Spec}(R)$, состоящее из всех идеалов, которые не содержат f. Рассмотрим на $\operatorname{Spec}(R)$ топологию, где база открытых множеств состоит из A_f, для всех $f \in R$. Эта топология называется **топологией Зариского**, а $\operatorname{Spec}(R)$ - **спектром** кольца.

Пространство $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ с топологией Зариского нехаусдорфово.

Oscar Zariski
(1899 – 1986)

Аксиомы Хаусдорфа

[T_0] (Аксиома Колмогорова) Для любых двух точек $x \neq y \in M$, у одной есть окрестность, не содержащая другую точку.

[T_1] (Аксиома Фреше) Для любых двух точек $x \neq y \in M$, у x есть окрестность, не содержащая y. Равносильная формулировка: все точки M являются замкнутыми множествами.

[T_2] (Аксиома Хаусдорфа) У любых двух точек $x \neq y \in M$ есть непересекающиеся окрестности.

[$T_{2\frac{1}{2}}$] (аксиома Урысона) У любых двух точек $x \neq y \in M$ есть окрестности, замыкания которых не пересекаются.

Аксиомы Хаусдорфа (продолжение)

[T_3] В M выполняется аксиома T_0. К тому же, для любого замкнутого множества $Z \subset M$, и любой точки $x \notin Z$, у Z и x есть непересекающиеся окрестности.

[T_4] В M выполняется аксиома T_1. К тому же, любые два непересекающихся замкнутых подмножества M имеют непересекающиеся окрестности.

[T_5] В любом подмножестве M, взятом с индуцированной топологией, выполняется аксиома T_4.

[T_6] В M выполняется аксиома T_4. К тому же, каждое замкнутое множество можно получить как счетное пересечение открытых.

Замечание:

В любом метрическом пространстве M выполняется T_6.

Аксиомы счетности

Определение: Пусть M - топологическое пространство, а $x \in M$ - точка. Набор окрестностей $\{U_\alpha \ni x\}$ называется **базой окрестностей в точке**, если каждая окрестность x содержит какой-то элемент $\{U_\alpha\}$.

Определение: Топологическое пространство **обладает счетной базой в точке**, если у каждой точки есть счетная база окрестностей. Это условие также называется **первой аксиомой счетности**

Замечание:
Для пространств со счетной базой окрестностей в точке, секвенциальная непрерывность равносильна обычной.

Определение: Топологическое пространство **обладает счетной базой**, если у него есть счетная база открытых множеств. Это условие также называется **второй аксиомой счетности**.

Утверждение:
Пространство со счетной базой в точке содержит плотное, счетное подмножество тогда и только тогда, когда у него есть счетная база.

База топологии. Предбаза топологии.

Определение: **Базой топологии** на M называется такой набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, что любое открытое множество получается как объединение элементов $\{U_\alpha\}$.

Определение: **Предбазой топологии** на M называется такой набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, что любое открытое множество получается как объединение и конечное пересечение элементов из $\{U_\alpha\}$.

Замечание: Любой набор множеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, такой, что $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, является предбазой некоторой топологии на M.

Замечание: Любой набор множеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, замкнутый относительно конечных пересечений, и такой, что $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, является базой некоторой топологии на M.

База топологии: основные свойства.

Утверждение: Пусть M – топологическое пространство, а $\{U_\alpha\} \subset 2^M$ – набор открытых подмножеств в M. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. $\{U_\alpha\}$ **является базой топологии на M.**

2. Для каждого $x \in M$, и каждой окрестности $U \ni x$, **найдется окрестность $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$, такая, что**

$$x \in U_\alpha \subset U.$$

Пример: Открытые шары в метрическом пространстве.

Слабость и сила топологии

Определение: Пусть на множестве M заданы две топологии: $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$. Топология $\mathcal{U}_1$ **слабее** $\mathcal{U}_2$, если тождественное отображение $(M,\mathcal{U}_2) \to (M,\mathcal{U}_1)$ непрерывно. В этом случае еще говорят $\mathcal{U}_2$ **сильнее** $\mathcal{U}_1$.

Замечание: **Это равносильно $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$.**

Чем **слабее** топология, тем **больше** сходящихся последовательностей, **меньше** непрерывных функций, и **меньше** открытых множеств.

На каждом множестве, кодискретная топология – самая слабая, а дискретная – самая сильная.

Пример: Равномерная сходимость на пространстве функций задает топологию, которая сильнее топологии поточечной сходимости.

Определение: Если на множестве заданы топологии $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, при этом $\mathcal{U}_1$ не слабее и не сильнее $\mathcal{U}_2$, говорят, что топологии $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ **несравнимы.**

Произведение топологических пространств

Пусть M, M' – топологические пространства, а $\mathcal{U} \subset 2^{M\times M'}$ - набор подмножеств $M \times M'$ вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Имеем

$$U_1 \times U_1' \cap U_2 \times U_2' = (U_1 \cap U_2) \times (U_1' \cap U_2'),$$

и поэтому $\mathcal{U}$ замкнут относительно конечных пересечений. Следовательно, **$\mathcal{U}$ – это база топологии на $M \times M'$**

Определение: Рассмотрим $M \times M'$ с топологией, заданной базой открытых множеств вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Это топологическое пространство называется **произведением M_1 и M_2**.

Произведение метрических пространств.

Утверждение. Пусть (M, d) и (M', d') - метрические пространства, а $\rho : (\mathbb{R}^{\geqslant 0})^2 \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

невырожденность: $\rho(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$

субаддитивность: $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$

монотонность: $\rho(a, b) \geqslant \rho(a_1, b_1)$, если $a \geqslant a_1$, а $b \geqslant b_1$.

Тогда

$$d_\rho((x, x'), (y, y')) := \rho(d(x, y), d'(x', y'))$$

задает метрику на $M \times M'$.

Произведение метрических пространств (продолжение).

Неравенство треугольника в $(M \times M', d_\rho)$ доказывается так:

$$\begin{aligned}
d_\rho((x,x'),(z,z')) &= \rho(d(x,z), d'(x',z')) \\
&\leqslant \rho(d(x,y)+d(y,z), d'(x',y')+d'(y',z')) \\
&\leqslant \rho(d(x,y), d'(x',y')) + \rho(d(y,z), d'(y',z')) \\
&= d_\rho((x,x'),(y,y')) + d_\rho((y,y'),(z,z')).
\end{aligned}$$

Примеры функций ρ, удовлетворяющих этим условиям:

1. $\rho_1(x,y) = x+y$
2. $\rho_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
3. $\rho_\infty(x,y) = \max(x,y)$.

Определение: Пусть M, M' – метрические пространства. Рассмотрим $(M \times M', d_{\rho_2})$, построенное выше. Оно называется **произведением** $M \times M'$.

Произведение метрических пространств и топология

Определение: Пусть $f: M_1 \to M_2$ - биективное отображение метрических пространств. Оно называется **билипшицевым**, если f и f^{-1} липшицевы.

Билипшицево отображение – гомеоморфизм.

Замечание: Из неравенств

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant a + b \leqslant 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\max(a, b) \leqslant a + b \leqslant 2 \max(a, b).$$

следует, что тождественные отображения

$$(M \times M', d_{\rho_2}) \to (M \times M', d_{\rho_1})$$

$$(M \times M', d_{\rho_\infty}) \to (M \times M', d_{\rho_1})$$

являются гомеоморфизмами (они билипшицевы).

Произведение метрических пространств и топология (2)

Утверждение: Тождественное отображение

$$M \times M' \xrightarrow{\mathsf{Id}} (M \times M', d_{\rho_\infty})$$

гомеоморфизм.

Доказательство:
Шаг 1: Открытые шары в $(M \times M', d_{\rho_\infty})$ имеют вид $B_r(x) \times B_r(x')$. Следовательно, $M \times M' \xrightarrow{\mathsf{Id}} (M \times M', d_{\rho_\infty})$ непрерывно.

Шаг 2: Проекции $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \xrightarrow{\pi} M$, $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \xrightarrow{\pi'} M'$ непрерывны, потому что они липшицевы.

Шаг 3: Отображение $X \to M \times M'$ непрерывно тогда и только тогда, когда его композиции с π, π' непрерывны. Поэтому

$$(M \times M', d_{\rho_\infty}) \xrightarrow{\mathsf{Id}} M \times M'$$

непрерывно. ■