Топология, лекция 4: Пространства с внутренней метрикой

Миша Вербицкий

27 апреля, 2012

матфак ВШЭ

Расстояние Хаусдорфа (повторение)

Определение: Подмножество $Z \subset M$ называется **ограниченным**, если оно содержится в шаре $B_C(x)$.

Определение: **ε-окрестность** $Z \subset M$ - объединение всех $B_\varepsilon(x)$, для $x \in Z$. Обозначим ее за $Z(\varepsilon)$.

Определение: Пусть Z_1, Z_2 - замкнутые, ограниченные подмножества M. Определим **расстояние Хаусдорфа** $d_H(Z_1, Z_2)$ как инфимум всех ε таких, что $Z_1 \subset Z_2(\varepsilon)$, $Z_2 \subset Z_1(\varepsilon)$

Утверждение: **d_H задает метрику на множестве замкнутых, ограниченных подмножеств.**

ε-сети (повторение).

Определение: Пусть M - метрическое пространство, $\varepsilon > 0$. Подмножество $V \subset M$ называется **ε-сетью**, если верно любое из следующих равносильных утверждений.

- **Для любой точки $m \in M$, есть $v \in V$ такая, что $d(v, m) < \varepsilon$.**
- $V(\varepsilon) = M$
- $d_H(M, V) < \varepsilon$

Теорема

Пусть M - полное метрическое пространство. **M компактно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в M есть конечная ε-сеть.**

Предел компактов в полном метрическом пространстве

Теорема: Пусть $\{Z_i\}$ - последовательность компактных подмножеств в полном метрическом пространстве M. Предположим, что $\{Z_i\}$ - последовательность Коши в метрике Хаусдорфа, а Z ее предел. **Тогда Z тоже компактно.**

Доказательство: Построим в Z конечную 3ε-сеть, для любого наперед заданного значения ε.

Шаг 1. Пусть $x_0, ..., x_k$ - конечная ε-сеть в Z_i, а $d_H(Z, Z_i) < \varepsilon$. Возьмем в Z точки $z_0, ..., z_k$ такие, что $d(x_i, z_i) < \varepsilon$ (они существуют, потому что $d_H(Z, Z_i) < \varepsilon$).

Мы докажем, что $V := \{z_i\}$ это 3ε-сеть в Z.

Шаг 2. $V(\varepsilon)$ содержит $\{x_0, ..., x_k\}$

Шаг 3. $V(2\varepsilon) \supset V(\varepsilon)(\varepsilon)$ содержит Z_i.

Шаг 4. $V(3\varepsilon) \supset V(2\varepsilon)(\varepsilon)$ содержит $Z_i(\varepsilon) \supset Z$. **Мы доказали, что V – это конечная 3ε-сеть.**

Пути в метрическом пространстве.

Определение: Пусть M метрическое пространство, а $\gamma : [0, \alpha] \to M$ - непрерывное отображение. Тогда γ называется **путем из $\gamma(0)$ в $\gamma(\alpha)$**, а $\gamma(0)$ и $\gamma(\alpha)$ - **началом** и **концом**.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0, \alpha]$ в объединение меньших отрезочков, $[0, \alpha] = [0, {}_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, \alpha]$. Обозначим $x_0 := 0, x_n := \alpha$. Пусть

$$L_\gamma(x_1, ...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Определение: **Длиной пути** γ называется супремум

$$L(\gamma) := \sup_{x_1, ..., x_{n-1}} L_\gamma(x_1, ...x_{n-1}),$$

взятый по всем разбиениям отрезка.

Замечание: $L(\gamma) \leqslant d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Для C-липшицева пути $\gamma : [0, \alpha] \to M$ длина γ не превосходит $C\alpha$.

Внутренняя метрика

Пусть M - метрическое пространство такое, что любые две точки могут быть соединены путем конечной длины. Тогда

$$d_{inner}(x,y) := \inf_\gamma \{L(\gamma) \quad | \quad \gamma \text{ соединяет } x \text{ и } y\}$$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **это метрика.**

Определение: Такая метрика называется **внутренней метрикой на M**. **Пространство с внутренней метрикой** – такое пространство (M, d), что $d_{inner} = d$.

Замечание: Если d_{inner} определена, то (M, d_{inner}) - **пространство с внутренней метрикой,** потому что

$$L^{inner}(\gamma) = L(\gamma):$$

(оба числа получены супремумом по одному и тому же множеству разбиений пути в отрезки).

Финслеровы и римановы метрики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть задана неотрицательная, непрерывная функция ν, переводящая каждый касательный вектор $v \in T_m\mathbb{R}^n$ в число (можно считать ее функцией на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\nu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$). Она называется **финслеровой формой**, если для каждого касательного пространства $T_m\mathbb{R}^n$, ограничение $\nu\Big|_{T_m\mathbb{R}^n}$ это норма, и **римановой формой**, если эта норма имеет вид $\nu(x) = \sqrt{g(x,x)}$, где $g(x,x)$ есть квадратичная форма на $T_m\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Зафиксируем финслерову форму ν, и определим длину гладкого пути $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$L(\gamma) = \int_0^1 \nu(\gamma'(t))dt.$$

Для кусочно-гладкого пути γ, состоящего из фрагментов $\gamma_1, ..., \gamma_n$, определим $L(\gamma) := \sum_i L(\gamma_i)$. Зададим метрику d_ν на $\mathbb{R}^n$ формулой $d_\nu(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфинум берется по всем кусочно-гладким путям, соединяющим x и y. Такая метрика называется **финслеровой метрикой** (**римановой**, если ν – риманова форма).

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите, что это действительно метрика.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Эта метрика очевидно внутренняя **(проверьте это).**

Условие Хопфа-Ринова.

Утверждение: Пусть M - пространство с внутренней метрикой. Для любых точек $x, y \in M$, и любого положительного $r < d(x,y)$, имеем

$$d(y, B_r(x)) = d(x,y) - r.$$

Это равенство называется **условие Хопфа-Ринова**.

Доказательство:
Пусть $\gamma: [0,1] \to M$ – путь из x в y, длины $d(x,y)+\varepsilon$. **Тогда для любой точки z на образе γ, выполнено**

$$d(x,z) + d(z,y) \leqslant d(x,y) + \varepsilon, \qquad (*)$$

по определению $L(\gamma)$.

Возьмем t_0 такой, что $d(x,z) = r$, для $z = \gamma(t_0)$. Получаем из (*):

$$d(z,y) \leqslant d(x,y) - r + \varepsilon.$$

Условие Хопфа-Ринова доказано.

Замечание:
В $\mathbb{Q}$ условие Хопфа-Ринова выполняется, а метрика не внутренняя.

Замкнутые шары и условие Хопфа-Ринова

Определение

$$\bar{B}_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) \leqslant r\}$$

называется **замкнутый шар**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если выполнено условие Хопфа-Ринова, то $d_H(B_r(x), B_{r+\varepsilon}(x)) \leqslant \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для каждой точки $z \in B_{r+\varepsilon}(x)$, $d(z, B_r(x)) \leqslant \varepsilon$, в силу Хопфа-Ринова. Значит z лежит в $B_r(x)(\varepsilon)$. Получаем $B_{r+\varepsilon}(x) \subset B_r(x)(\varepsilon)$. Включение $B_r(x) \subset B_{r+\varepsilon}(x)(\varepsilon)$ есть тавтология. ■

СЛЕДСТВИЕ: $\bar{B}_r(x)$ **– замыкание** $B_r(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $B_r(x) = \bigcup_{r'<r} \bar{B}_{r'}(x)$, а $d_H(\bar{B}_r(x), \bar{B}_{r'})(x) \leqslant |r - r'|$, значит, **расстояние Хаусдорфа между** $\bar{B}_r(x)$ **и** $B_r(x)$ **равно нулю.** ■

Теорема Хопфа-Ринова (часть 1).

Определение:
Метрическое пространство называется **локально компактным**, если для каждого $x \in M$ найдется $r > 0$ такое, что шар $\bar{B}_r(x)$ компактен.

Предостережение.
Не любое полное метрическое пространство локально компактно.

Теорема: Пусть M - локально компактное метрическое пространство с условием Хопфа-Ринова. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. M **полно.**

2. **Любое замкнутое, ограниченное подмножество M компактно.**

Замечание: Из условия 2 сразу следует полнота **(докажите это).**

Теорема Хопфа-Ринова, часть 1: доказательство.

Шаг 1. Достаточно доказать, что любой замкнутый шар в M компактен. **Предположим, что есть некомпактный замкнутый шар.**

Шаг 2. Рассмотрим функцию $\rho: M \to \mathbb{R}$,

$$\rho(x) := \sup_\rho \{\rho \in \mathbb{R} \ | \ \bar{B}_\rho(x) \ \text{компактен}\}.$$

Она конечна и 1-липшицева, значит непрерывна.

Шаг 3. Шар $Z := \bar{B}_{\rho(x)}(x)$ является пределом компактов в смысле метрики Громова-Хаусдорфа. **Поэтому он компактен.** Пусть 3ε – минимум функции ρ на Z.

Шаг 4. Возьмем в Z конечную ε-сеть $V = \{x_i\}$. Поскольку $V(\varepsilon) = Z$, имеем

$$V(2\varepsilon) = Z(\varepsilon) = \bar{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x).$$

Поэтому шар $\bar{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ лежит в конечном объединении компактных шаров $\bar{B}_{3\varepsilon}(x_i) \Rightarrow \bar{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ **компактен.** ■

Геодезические в метрическом пространстве

Определение: Непрерывное отображение $\gamma : [0, \alpha] \to M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Если $\varphi : [0, \alpha] \to [0, \alpha]$ – гомеоморфизм, а γ - путь из x в y, композиция $\varphi \circ \gamma$ - тоже путь из x в y. Такой путь называется **репараметризацией** γ.

Параметризация γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

Существование геодезической параметризации.

Утверждение: Пусть $\gamma: [0,\alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем $d(x,y)=\alpha$. **Тогда у γ существует геодезическая параметризация.**

Эвристический аргумент. Представьте себе велосипедиста, который едет по дороге с переменной скоростью. Пусть $\gamma(t)$ - координата велосипедиста. Возьмем вместо t расстояние, которое велосипедист уже проехал.

Шаг 1. Лемма:
Непрерывная биекция из отрезка в отрезок – это гомеоморфизм.

Шаг 2. Рассмотрим отображение

$$\varphi: [0,\alpha] \to [0,\alpha], \quad \varphi(t) = d(x,\gamma(t)).$$

Оно непрерывно.

Шаг 3. Оно монотоно растет (каждый отрезок кратчайшей - кратчайшая). Следовательно, биективно, а поэтому φ – гомеоморфизм.

Шаг 4. $\gamma' = \varphi^{-1} \circ \gamma$ - геодезическая параметризация.

Теорема Хопфа-Ринова, часть 2.

Отметим, что **геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.**

Теорема. Пусть M - локально компактное, полное метрическое пространство с условием Хопфа-Ринова, а $x_0, x_1 \in M$ произвольные точки, с $d(x_0, x_1) = \alpha$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.** В частности, M **является пространством с внутренней метрикой.**

Доказательство. Шаг 1: В силу компактности, **в шаре $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_{1/2}, x_1) = \alpha/2$.** В самом деле, функция $d(\cdot, x_0) : \bar{B}_{\alpha/2}(x_1) \to \mathbb{R}$ непрерывная на компакте, значит, достигает минимума, который равен $d(x_0, \bar{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$ по условию Хопфа-Ринова.

Шаг 2: Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0, 1]$ **найдем точку x_λ, такую, что $d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|$.**

Шаг 3: Мы получили **изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в M. Продолжим на пополнение, получим геодезическую.** ■

Heinz Hopf
(1894-1971)