Топология, лекция 3: Компакты в метрических пространствах

Миша Вербицкий

20 апреля, 2012

матфак ВШЭ

Компакты.

Определение: Набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ в M называется **покрытием** M, если $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. **Подпокрытием** покрытия $\{U_\alpha\}$ называется такое подмножество $\{U_\alpha\}$, которое тоже является покрытием.

Определение: Пространство M называется **компактным**, если из любого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение: Пространство M называется **секвенциально компактным**, если любая последовательность точек $\{x_i\}$ в M имеет сходящуюся подпоследовательность.

Теорема Гейне-Бореля: Метрическое пространство M компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.

Липшицевы отображения

Определение: Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) - метрические пространства, а $C > 0$ - вещественное число. Отображение $f: M_1 \to M_2$ называется C-**липшицевым** если для любых $x, y \in M_1$,

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant C d_1(x, y).$$

Липшицевы отображения непрерывны.

ЗАМЕЧАНИЕ: Расстояние $d_z(x) := d(z, x)$ до фиксированной точки $z \in M$ - **1-липшицева функция из M в $\mathbb{R}$ (докажите это).**

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
(1832 – 1903)

Теорема Гейне-Бореля: доказательство.

Шаг 1. Импликация «компактность» $\Rightarrow$ «секвенциальная компактность» **очевидна.** В самом деле, если у $\{x_i\}, i \in \mathbb{N}$ нет сходящейся подпоследовательности, у каждой точки $x \in M$ есть окрестность U_x, содержащая конечное число точек из $\{x_i\}$. Тогда $U := \bigcup_{x\in M} U_x \backslash \{x_i\}$ открыто, а покрытие $\{U, U_{x_i}\}, i \in \mathbb{N}$ **не содержит конечных подпокрытий.**

Шаг 2. Любая непрерывная функция **достигает максимума и минимума** на секвенциальном компакте.

Шаг 3. Пусть $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ - покрытие метрического пространства M. Определим функцию

$$\rho_{\mathcal{U}}(x) := \sup_\rho \{\rho \in \mathbb{R} \ \mid \ B_\rho(x) \ \text{ содержится} \\ \text{в одном из элементов покрытия } \mathcal{U}\}.$$

Тогда $\rho_{\mathcal{U}}$ 1-липшицева. Значит $\rho_{\mathcal{U}}$ **принимает минимум на каждом секвенциальном компакте.**

Шаг 4. Минимальное покрытие – покрытие, не содержащее меньшего подпокрытия. **У каждого покрытия есть подпокрытие, которое минимально (выведите из леммы Цорна)**.

Теорема Гейне-Бореля: доказательство (окончание).

Шаг 5. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ – минимальное покрытие секвенциального компакта , а $r > 0$ – минимум $\rho_{\mathcal{U}}$ на M. В каждом $U_\alpha \in \mathcal{U}$, выберем $x_\alpha \in U_\alpha$, не принадлежащий никакому другому элементу покрытия. Тогда $d(x_\alpha, x_{\alpha'}) > r$. Если $\{x_\alpha\}$ бесконечна, у нее нет сходящихся подпоследовательностей.
Теорема Гейне-Бореля доказана.

Émile Borel
(1871 – 1956)

Топологические пространства.

Феликс Хаусдорф, “Grundzüge der Mengenlehre”

Определение: Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. Тогда $\mathcal{U}$ **задает топологию** на M, если

- **Любое объединение открытых подмножеств открыто**
- **Конечное пересечение открытых подмножеств открыто**
- M **и пустое множество** $\emptyset$ **открыты.**

Такое M называется **топологическим пространством**.

Примеры: **дискретная топология** (все множества открыты), **кодискретная топология** (открыты только M и $\emptyset$).

Простейшие понятия топологии.

Предел последовательности.

Непрерывные отображения. Секвенциальная непрерывность.

Замкнутое множество, замыкание.

Компакт. Секвенциальный компакт.

Предостережение 1:
Из секвенциальной компактности не следует обычная. Из секвенциальной непрерывности не следует обычная.

Предостережение 2:
Теорема Гейне-Бореля **неверна** для более общих топологических пространств.

Felix Hausdorff
(1868 – 1942)

Расстояние Хаусдорфа

Определение: Подмножество $Z \subset M$ называется **ограниченным**, если оно содержится в шаре $B_C(x)$.

Определение: **ε-окрестность** $Z \subset M$ - объединение всех $B_\varepsilon(x)$, для $x \in Z$. Обозначим ее за $Z(\varepsilon)$.

Определение: Пусть Z_1, Z_2 - замкнутые, ограниченные подмножества M. Определим **расстояние Хаусдорфа** $d_H(Z_1, Z_2)$ как инфимум всех ε таких, что $Z_1 \subset Z_2(\varepsilon)$, $Z_2 \subset Z_1(\varepsilon)$

Утверждение: **d_H задает метрику на множестве замкнутых, ограниченных подмножеств.**

ε-сети.

Определение: Пусть M - метрическое пространство, $\varepsilon > 0$. Подмножество $V \subset M$ называется **ε-сетью**, если верно любое из следующих равносильных утверждений.

- **Для любой точки $m \in M$, есть $v \in V$ такая, что $d(v,m) < \varepsilon$.**

- $V(\varepsilon) = M$

$d_H(M,V) < \varepsilon$

Теорема
Пусть M - полное метрическое пространство. **M компактно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в M есть конечная ε-сеть.**

Доказательство. Шаг 1: Если M компактно, возьмем покрытие $\bigcup_{x\in M} B_x(\varepsilon)$ шарами радиуса ε, выберем конечное подпокрытие. **Это даст конечную ε-сеть.**

ε-сети (продолжение).

Шаг 2: Предлопожим, наоборот, что в M есть конечная ε-сеть, для всякого ε, и пусть $\{x_i\}$ – какая-то последовательность. **В каждом из шаров конечной ε-сети содержится бесконечное количество элементов $\{x_i\}$.**

Шаг 3: Выберем последовательность $\varepsilon_i \to 0$, и пусть $\{U_{\varepsilon_i}(j)$ соответствующие ε-сети. Выкинем из $\{x_i\}$ все элементы, кроме бесконечной подпоследовательности, содержащейся в одном из шаров $U_{\varepsilon_1}(j_1)$, потом выкинем все элементы, кроме бесконечной подпоследовательности, содержащейся в одном из шаров $U_{\varepsilon_2}(j_2)$ и т.д. Получим подпоследовательность, которая содержится, начиная с N-го члена, в $U_{\varepsilon_N}(j_N)$, **то есть последовательность Коши.**

Шаг 4: Поскольку M полно, **эта подпоследовательность сходится.** ■

Предел компактов в полном метрическом пространстве

Теорема: Пусть $\{Z_i\}$ - последовательность компактных подмножеств в полном метрическом пространстве M. Предположим, что $\{Z_i\}$ - последовательность Коши в метрике Хаусдорфа, а Z ее предел. **Тогда Z тоже компактно.**

Доказательство: Построим в Z конечную 3ε-сеть, для любого наперед заданного значения ε.

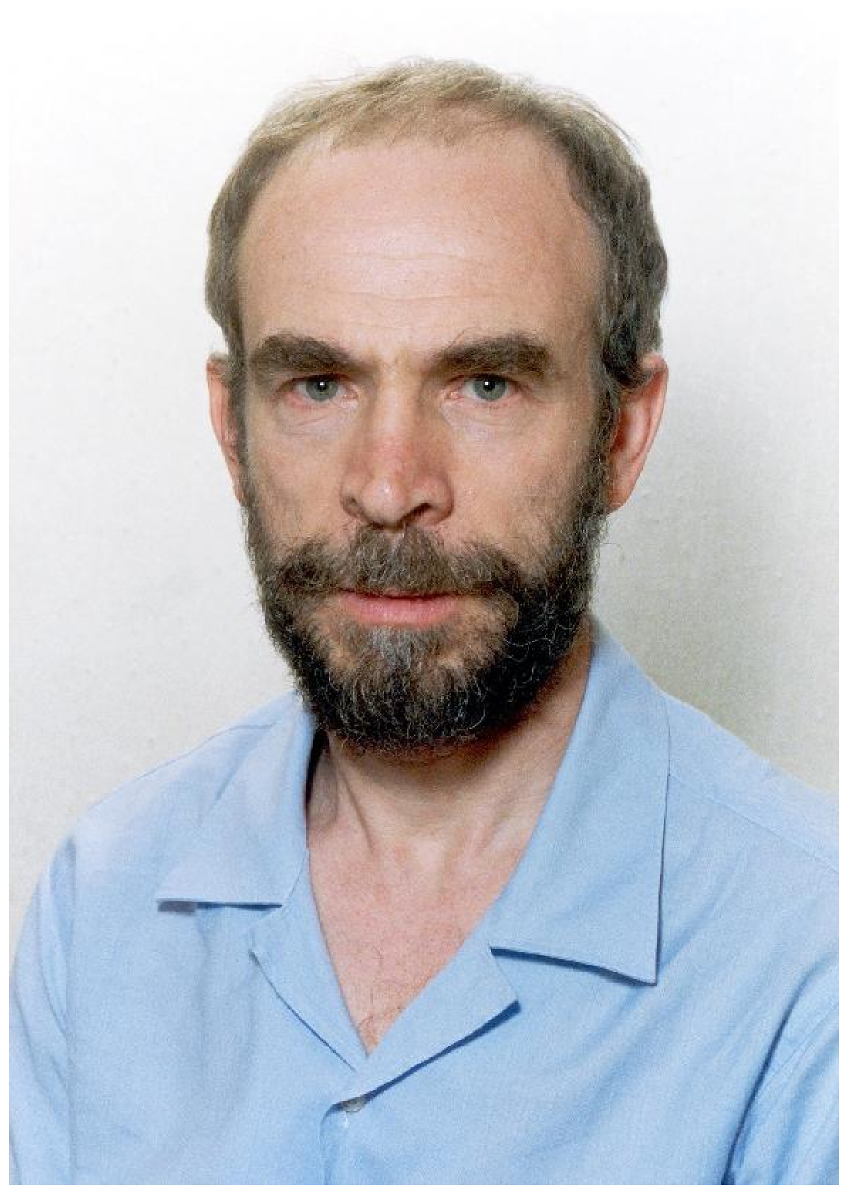
Шаг 1. Пусть $x_0, ..., x_k$ - конечная ε-сеть в Z_i, а $d_H(Z, Z_i) < \varepsilon$. Возьмем в Z точки $z_0, ..., z_k$ такие, что $d(x_i, z_i) < \varepsilon$ (они существуют, потому что $d_H(Z, Z_i) < \varepsilon$).

Мы докажем, что $V := \{z_i\}$ это 3ε-сеть в Z.

Шаг 2. $V(\varepsilon)$ содержит $\{x_0, ..., x_k\}$

Шаг 3. $V(2\varepsilon) \supset V(\varepsilon)(\varepsilon)$ содержит Z_i.

Шаг 4. $V(3\varepsilon) \supset V(2\varepsilon)(\varepsilon)$ содержит $Z_i(\varepsilon) \supset Z$. **Мы доказали, что V – это конечная 3ε-сеть.**



Михаил Громов
(р. 23 декабря 1943)