Топология, лекция 2: метрики и нормы на векторных пространствах

Миша Вербицкий

15 апреля, 2012

матфак ВШЭ

Метрические пространства (повторение)

Определение: Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: M \times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, удовлетворяющая следующим условиям

Невырожденность: $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$

Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

для любых точек $x, y, z \in M$.

Последовательности Коши (повторение)

Определение: Пусть $x \in M$ точка в метрическом пространстве. Открытый **ε-шар** $B_\varepsilon(x)$ в с центром в x - множество всех точек, отстоящих от x меньше, чем на ε:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M \ \ | \ \ d(x,y) < \varepsilon\}$$

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$, все элементы последовательности $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в некотором ε-шаре.

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M **сходится к $x \in M$**, если в любом ε-шаре $B_\varepsilon(x)$ содержатся все члены $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа. В этом случае также говорят, что x - это **предел** последовательности $\{\alpha_i\}$. Метрическое пространство M называется **полным**, если у любой последовательности Коши есть предел.

Пополнение (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этого следует, что для любой последовательности Коши $\{\alpha_i\}$, и любого $x \in M$, последовательность вещественных чисел $\{d(x, \alpha_i)\}$ – последовательность Коши в $\mathbb{R}$.

Более того, для любых последовательностей Коши $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$, последовательность $\{d(\alpha_i, \beta_i)\}$ – тоже последовательность Коши.

Это задает метрику на классах эквивалентности последовательностей Коши: $d(a_i, b_i) := \lim_{i \to \infty} |a_i - b_i|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Множество классов эквивалентности последовательностей Коши в M с метрикой, определенной выше, называется **пополнением M.**

ТЕОРЕМА:
Пополнение является **полным метрическим пространством.**

Метрики на абелевых группах (повторение)

Определение: Изометрия метрических пространств есть биекция, сохраняющая расстояния.

Определение:
Пусть G - абелева группа, а d - метрика на G. Мы будем использовать обозначение $x, y \to x + y$ для групповой операции в абелевых группах. Говорят, что $(G, +, d)$ – **метрическая группа,** если операция $x \to -x$ взятия обратного элемента – изометрия, и операция $x \to x + g$ – изометрия для любого $g \in G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $\nu: G \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **нормой на группе** если
(i) $\nu(g) = \nu(-g)$, $\nu(0) = 0$.
(ii) $\nu(g) > 0$ для любого $g \neq 0$.
(iii) $\nu(g + g') \leqslant \nu(g) + \nu(g')$, для любых $g, g' \in G$.

Для любой нормы ν **функция $d_\nu(x, y) := \nu(x - y)$ задает метрику на G, согласованную с групповой структурой (проверьте это)**

Обратное тоже верно: **все инвариантные метрики на G могут быть получены таким образом**

Нормированные пространства

Определение:
Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu: \ V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция со значениями в неотрицательных числах. ν называется **нормой** на V, если имеет место следующее

Невырожденность: $\nu(x) > 0$, если $x \neq 0$,

Неравенство треугольника: $\nu(x + x') \leqslant \nu(x) + \nu(x')$.

Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$,

для любых x, $x' \in V$, и любого $\lambda \in \mathbb{R}$. В такой ситуации V называется **нормированным пространством**.

Норма задает метрику на пространстве V, стандартной формулой $d(x, y) := \nu(x - y)$.

Примеры нормы

1. $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $z = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим

$$|z|_{L^\infty} := \max |x_i|.$$

2. $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $z = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим

$$|z|_{L^1} := \sum |x_i|.$$

3. $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $z = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим

$$|z|_{L^2} := \sqrt{\sum x_i^2}.$$

4. На одномерном пространстве норма единственна с точностью до умножения на число:

$$x \to c|x|.$$

Неравенство Коши-Буняковского

Неравенство треугольника для евклидовой нормы называется **неравенством Коши-Буняковского**.

Возьмем два ненулевых, неколлинеарных вектора x, y в векторном пространстве с положительно определенным скалярным произведением g. Неравенство Коши-Буняковского следует из

$$\sqrt{g(x,x)} + \sqrt{g(y,y)} \geqslant \sqrt{g(x+y,x+y)}.$$

Это равносильно $\sqrt{g(x,x)g(y,y)} \geqslant g(x,y)$.

Из $g(x-\lambda y, x-\lambda y) > 0$ следует, что что квадратичный полином

$$P(\lambda) := g(x,x) - 2\lambda g(x,y) + \lambda^2 g(y,y),$$

имеет отрицательный дискриминант $D = g(x,y)^2 - g(x,x)g(y,y)$.

Также неравенство Коши-Буняковского можно получить из формулы

$$g(x,y) = |x||y|\cos\alpha \leqslant |x||y| = \sqrt{g(x,x)g(y,y)}.$$

известной из школьного курса геометрии.

Виктор Яковлевич Буняковский
(1804-1889)

Выпуклые множества

Определение: **Отрезок** $[x, y]$ в векторном пространстве – это множество точек вида $\lambda x + (1-\lambda)y$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ - вещественное число.

Определение: Подмножество Z векторного пространства V называется **выпуклым**, если для любых точек $x, y \in Z$, Z содержит отрезок $[x, y]$ целиком.

Утверждение: Пусть ν - норма на векторном пространстве. **Тогда единичный шар с центром в нуле**

$$B_1(0) := \{x \in V \quad \nu(x) < 1\}$$

выпуклый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

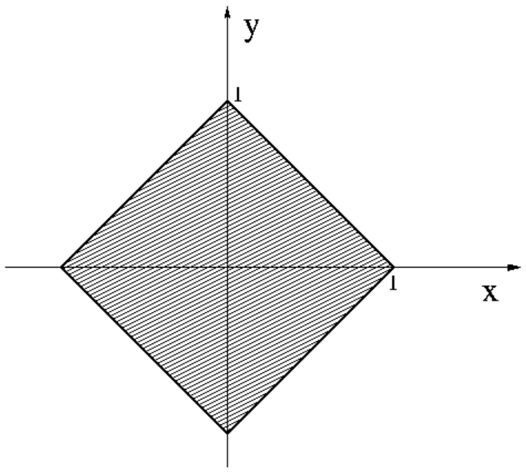
$$\nu(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \nu(\lambda x) + \nu(1-\lambda)y) = \lambda\nu(x) + (1-\lambda)\nu(y).$$

Если $x, y \in B_1(0)$, то $\nu(x), \nu(y) \leqslant 1$, что дает

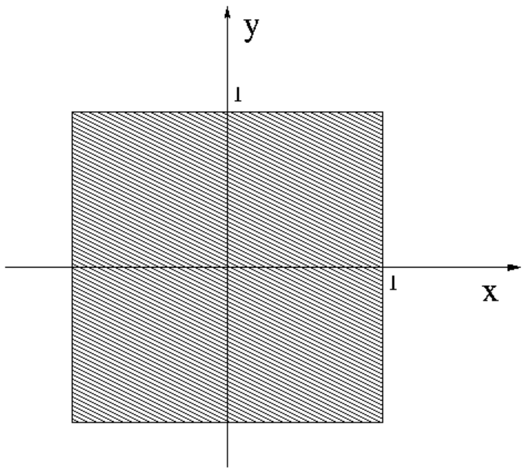
$$\lambda\nu(x) + (1-\lambda)\nu(y) \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

■

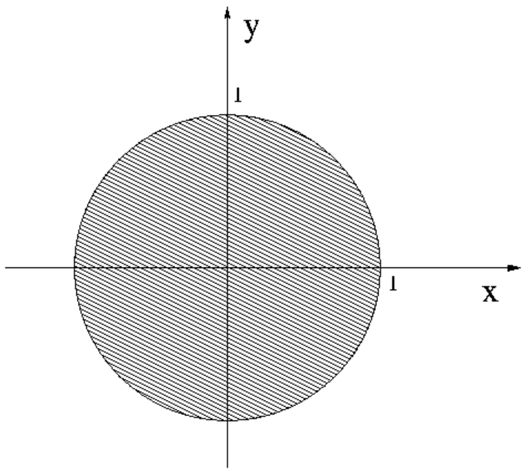
единичный шар в $\mathbb{R}^2$



в L^1-норме



в L^∞-норме



в L^2-норме (евклидовой)

Непрерывные отображения.

Определение:
Подмножество $Z \subset M$ метрического пространства называется **открытым**, если оно является объединением (открытых) ε-шаров, и **замкнутым**, если его дополнение открыто.

Определение:
Последовательность $\{z_i\}$ **сходится к** z, если $\lim\limits_{i \to \infty} d(z_i, z) = 0$

Определение:
Пусть $f: M_1 \to M_2$ – отображение метрических пространств. Оно называется **непрерывным**, если верны следующие равносильные условия.

1. Отображение f **сохраняет пределы**: если последовательность $\{z_i\}$ сходится к z, то $\{f(z_i)\}$ сходится к $f(z)$.

2. Прообраз любого открытого множества открыт.

Докажите равносильность этих условий

Непрерывные отображения (продолжение).

Композиция непрерывных отображений непрерывна.

Непрерывное отображение не обязано переводить последовательности Коши в последовательности Коши.

Пусть z - точка метрического пространства M. Тогда $x \stackrel{d_z}{\to} d(z,x)$ является непрерывным отображением из M в $\mathbb{R}$ с евклидовой метрикой.

Действительно, $d_z(x) - d_z(y) \leqslant d(x,y)$.

Определение:
Отображение метрических пространств называется **гомеоморфизмом**, если оно непрерывно, биективно, и обратное ему тоже непрерывно.

Эквивалентность норм.

Определение: Две нормы ν и ν' на векторном пространстве V называются **эквивалентными**, если тождественное отображение $(V,\nu) \to (V,\nu')$ это гомеоморфизм.

Утверждение:
Пусть ν и ν' - нормы на векторном пространстве V. Эти нормы **эквивалентны** тогда и только тогда, когда существуют ненулевые числа C_1, C_2, такие, что **для любого $x \in V$ выполнены неравенства**

$$C_1\nu(x) \leqslant \nu'(x) \leqslant C_2\nu(x).$$

Доказательство. Шаг 1: Из существования таких неравенств сразу следует, что любая сходящаяся последовательность в метрике ν сходится в ν' **(проверьте это).**

Шаг 2: Неравенство $C_1\nu(x) \leqslant \nu'(x)$ выполнено тогда и только тогда, когда $\sup_{x\in B_{1,\nu'}(0)} C_1\nu(x) \leqslant 1$. В противном случае, есть последовательность векторов $x_i \in B_{1,\nu'}$, удовлетворяющая $\nu(x_i) \geqslant n^2$. В этом случае $\frac{1}{n}x_i$ сходится к нулю в ν' и не сходится в ν. ■

Компакты.

Определение: Набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ в M называется **покрытием** M, если $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. **Подпокрытием** покрытия $\{U_\alpha\}$ называется такое подмножество $\{U_\alpha\}$, которое тоже является покрытием.

Определение: Пространство M называется **компактным**, если из любого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение: Пространство M называется **секвенциально компактным**, если любая последовательность точек $\{x_i\}$ в M имеет сходящуюся подпоследовательность.

Теорема Гейне-Бореля: **Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.**

ТЕОРЕМА:
Замкнутое, ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно.

Эти теоремы будут доказаны в следующей лекции.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M компактно, а $f: M \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. **Тогда f достигает максимума где-то на M. Проверьте это!**

Эквивалентность норм (продолжение).

ТЕОРЕМА: На конечномерном пространстве $V = \mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $z = \sum_i \lambda_i x_i$, а x_i - базис в конечномерном пространстве V. Тогда

$$\nu(z) \leqslant \sum_i |\lambda_i| \nu(x_i) \leqslant \max_i \nu(x_i) \sum_i |\lambda_i| = C|z|_{L^1}$$

где $C = \max_i \nu(x_i)$.

Шаг 2: Из этого следует, что отображение $(\mathbb{R}^n, L^1) \to (R^n, \nu)$ непрерывно. Функция $\nu: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}^n, \nu$, потому что это расстояние до нуля. **Значит, $\nu: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна на $(\mathbb{R}^n, L^1)$.**

Шаг 3: Метрика L^1 эквивалентна L^2 **(проверьте)**.

Шаг 4: Значит, единичный шар $B_{1,L^1}(0)$ в метрике L^1 **компактен**, то есть **функция ν достигает максимума C' на $B_{1,L^1}(0)$.**

Шаг 5: В таком случае, $C'|z|_{L^1} \leqslant \nu(z)$. Вместе с шагом 1, это доказывает, что ν эквивалентна L^1. ∎

Выпуклые множества и норма.

Теорема:
Пусть V - конечномерное векторное пространство, а B - непустое открытое, выпуклое, ограниченное подмножество в V. Предположим, что B центрально-симметрично, то есть для каждого $v \in B$ точка $-v$ тоже лежит в B. **Тогда B является единичным шаром для какой-то нормы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Определим норму формулой

$$v \stackrel{\rho}{\mapsto} \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^{>0} \quad | \quad \lambda^{-1} v \notin B\}$$

Проверьте, что это норма, самостоятельно. ■

Stefan Banach
(1892 – 1945)