Топология, лекция 1: метрика, пополнение, p-адические числа

Миша Вербицкий

6 апреля, 2008

матфак ВШЭ

Метрические пространства

Определение: Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: \ M\times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, удовлетворяющая следующим условиям

Невырожденность: $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

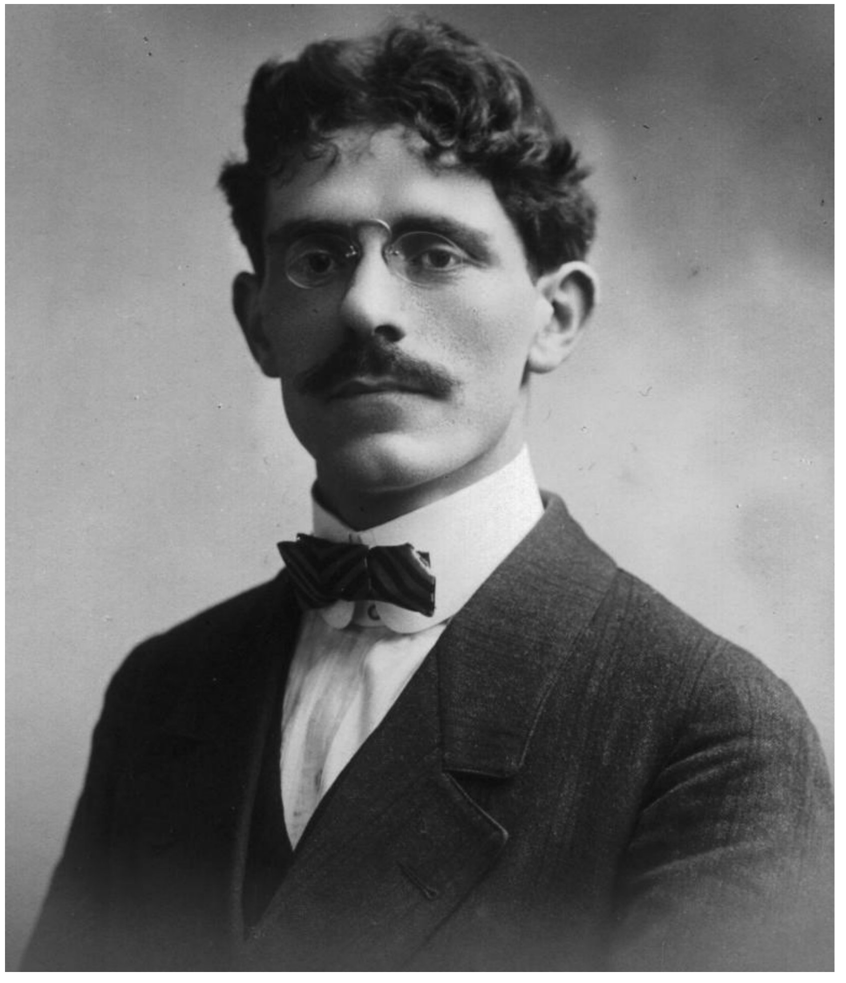
Симметричность: $d(x,y)=d(y,x)$

Неравенство треугольника: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

для любых точек $x,y,z\in M$.

Метрика - математическая абстракция, отвечающая интуитивному представлению о «расстоянии»

Определение метрического пространства
дал Морис Фреше в 1906-м году, в своей диссертации "Sur quelques points du calcul fonctionnel".



Maurice Fréchet
(1878 – 1973)

Последовательности Коши

Определение: Пусть $x \in M$ точка в метрическом пространстве. Открытый **ε-шар** $B_\varepsilon(x)$ в с центром в x - множество всех точек, отстоящих от x меньше, чем на ε:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M \ \mid \ d(x,y) < \varepsilon\}$$

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$, все элементы последовательности $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в некотором ε-шаре. Последовательности Коши $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ называются **эквивалентными**, если последовательность $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, ...$ является последовательностью Коши.

Не путать со сходимостью!

Все сходящиеся последовательности - последовательности Коши, но не все последовательности Коши сходятся.

Сходящиеся последовательности

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M **сходится к** $x \in M$, если в любом ε-шаре $B_\varepsilon(x)$ содержатся все члены $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа. В этом случае также говорят, что x - это **предел** последовательности $\{\alpha_i\}$. Метрическое пространство M называется **полным**, если у любой последовательности Коши есть предел.

Свойства последовательностей Коши и пределов:

1. Подпоследовательность последовательности Коши - снова последовательность Коши. Последовательность Коши эквивалентна любой своей подпоследовательности.

2. Если переставить элементы последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ произвольным образом, получится последовательность Коши, эквивалентная $\{\alpha_i\}$.

3. Предел последовательности единственный, если существует.

Вещественные числа

ПРИМЕР: Пример метрического пространства: **множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, с метрикой $d(x,y) = |x-y|$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте аксиомы метрического пространства.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если последовательность $\alpha_i \in \mathbb{R}$ сходится к x, **это последовательность Коши (проверьте)**.

ТЕОРЕМА: $\mathbb{R}$ **полно: Любая последовательности Коши вещественных чисел сходится**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Можно считать, что это **определение вещественных чисел.**

Пополнение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Диаметр** множества $X \subset M$ есть $\sup_{x,y \in X} d(x, y)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Диаметр ε-шара не больше 2ε.**

Из этого следует, что для любой последовательности Коши $\{\alpha_i\}$, и любого $x \in M$, последовательность вещественных чисел $\{d(x, \alpha_i)\}$ – последовательность Коши в $\mathbb{R}$.

Более того, для любых последовательностей Коши $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$, последовательность $\{d(\alpha_i, \beta_i)\}$ – тоже последовательность Коши **(проверьте это).**

Это задает метрику на классах эквивалентности последовательностей Коши: $d(a_i, b_i) := \lim_{i \to \infty} |a_i - b_i|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Множество классов эквивалентности последовательностей Коши в M с метрикой, определенной выше, называется **пополнением M.**

ТЕОРЕМА:
Пополнение является **полным метрическим пространством.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Проверьте аксиомы метрического пространства.**

Метрики на абелевых группах

Определение: Пусть M, N - метрические пространства. Вложение $M \overset{\iota}{\hookrightarrow} N$ называется **изометрическим вложением**, если ι сохраняет расстояния: $d_M(x,y) = d_N(\iota(x), \iota(y))$, для любых $x, y \in M$. **Изометричные пространства** - пространства, между которыми есть биекция, сохраняющая расстояния.

Определение:
Пусть G - абелева группа, а d - метрика на G. Мы будем использовать обозначение $x, y \to x+y$ для групповой операции в абелевых группах. Говорят, что $(G, +, d)$ метрическая группа, если операция $x \to -x$ взятия обратного элемента есть изометрия, и операция $x \to x+g$ есть изометрия для любого $g \in G$. В этом случае также говорят что метрика **согласована с групповой структурой,** или что метрика **инвариантна.**

«Группа с инвариантной метрикой действует сама на себе изометриями»

Задание инвариантных метрик через норму

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $\nu: G \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **нормой на группе** если

(i) $\nu(g) = \nu(-g)$, $\nu(0) = 0$.

(ii) $\nu(g) > 0$ для любого $g \neq 0$.

(iii) $\nu(g + g') \leqslant \nu(g) + \nu(g')$, для любых $g, g' \in G$.

Для любой нормы ν **функция** $d_\nu(x, y) := \nu(x - y)$ **задает метрику на** G**, согласованную с групповой структурой (проверьте это)**

Обратное тоже верно: **все инвариантные метрики на** G **могут быть получены таким образом (проверьте!)**

Пополнение группы с инвариантной метрикой

Пусть $A, B \subset G$ - подмножества в группе. Множество всех сумм вида $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ обозначается $A+B$.

Сумма двух шаров радиуса $\varepsilon, \varepsilon'$ содержится в шаре радиуса $\varepsilon + \varepsilon'$.

Поэтому множество C последовательностей Коши в метрической группе с операцией почленного сложения **образует группу**, а последовательности Коши, эквивалентные нулю - **подгруппу $C_0 \subset C$ этой группы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: **Факторгруппа C/C_0 изоморфна пополнению G.**

СЛЕДСТВИЕ: **Пополнение G – снова метрическая группа.**

ПРИМЕР: Пополнение $\mathbb{Q}$ в обычной метрике есть $\mathbb{R}$ (это одно из определений $\mathbb{R}$).

Нормирования на кольце

Определение: Пусть A - кольцо, с ассоциативным, коммутативным умножением, а $\nu : A \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция на A. Функция ν называется **нормой** (или нормированием) если

1. **ν – это норма на группе A по сложению**

2. **ν мультипликативна:** $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$

Пример нормы: $t \to |t|$ на $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пример нормы: $\nu(t) = 0$, если $t = 0$, и 1 в противном случае. Она мультипликативна на любом кольце без делителей нуля.

Кольцо с нормой наделено инвариантной метрикой, построенной по формуле $d_\nu(x,y) = \nu(x-y)$.

ТЕОРЕМА: Пополнение кольца по этой метрике - снова кольцо.

Вещественные числа

ЗАМЕЧАНИЕ: Вещественные числа можно определить как пополнение рациональных. Чтобы избежать кольцевого аргумента, повторим определение метрического пространства, потребовав, чтобы метрика принимала значения в $\mathbb{Q}$.

Определение: Пусть M - множество. **$\mathbb{Q}$-Метрикой** на M называется функция $d: M \times M \to \mathbb{Q}^{\geqslant 0}$, удовлетворяющая следующим условиям:
Невырожденность: $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$
Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$
для любых точек $x, y, z \in M$.

Легко видеть, что $d(x,y) := |x-y|$ **задает $\mathbb{Q}$-метрику на $\mathbb{Q}$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пополнение $\mathbb{Q}$ есть множество классов эквивалентности последовательностей Коши в $\mathbb{Q}$. Аргумент, аналогичный вышеприведенному, показывает, что пополнение $\mathbb{Q}$ является кольцом. Можно проверить, что это поле. Оно называется **полем вещественных чисел**, обозначается $\mathbb{R}$.

p-адические числа.

Зафиксируем простое число p.

Определение:
Пусть $x \in \mathbb{Z}$ представимо в виде $x = p^\alpha x_1$, где x_1 не делится на p, а $\alpha \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$. Тогда **$p$-адическая норма** $\nu(x)$ равна $p^{-\alpha}$. Положим также $\nu(0) = 0$. Пополнение $\mathbb{Z}$ относительно такой нормы называется **кольцом целых p-адических чисел**, обозначается $\mathbb{Z}_p$.

Аналогичная конструкция, примененная к $\mathbb{Q}$, даст пополнение $\mathbb{Q}_p$, которое называется **полем p-адических чисел.** Любое рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ можно представить в виде $a = p^\alpha \frac{m}{n}$, где n, m взаимно просты с p, а α - целое число, однозначно заданное разложением числителя и знаменателя a на простые множители. Определим $\nu(a) := p^{-\alpha}$.

Неархимедовы метрики

p-адическая метрика **неархимедова:**

$$d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(y, z)).$$

Из этого условия следует аксиома треугольника, но оно сильнее.

Геометрически, неархимедовость значит следующее: **любой треугольник в неархимедовом пространстве равнобедренный, и его основание меньше двух других сторон.**

ε-шар с центром в любой точке $B_\varepsilon(a)$ совпадает с $B_\varepsilon(a)$. **В неархимедовом пространстве, любая точка шара является его центром.**

Арифметика p-адических чисел

В любой группе с инвариантной метрикой, заданной нормой ν, **ряд вида $\sum g_i$ сходится, если сходится соответствующий ряд из норм $\sum \nu(g_i)$.**

Поэтому для любой последовательности целых чисел z_i, **ряд $\sum_{i=0}^{\infty} z_i p^i$ сходится к целому p-адическому числу.**

В частности,

$$\frac{1}{1-p} = 1 + p + p^2 + p^3 + ...$$

целое p-адическое.

Если два целых числа a, b принадлежат ε-шару, с $2\varepsilon < p^{-i}$, разность $a - b$ делится на p^i. Поэтому их записи в p-ичной системе счисления совпадают вплоть до i-го знака.

Записав элементы последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ целых чисел в p-ичной системе счисления, мы получим, что соответствующая последовательность цифр стабилизируется: **на i-м месте, начиная с какого-то момента, стоит одна и та же цифра.**

Арифметика p-адических чисел (продолжение)

Пределом любой последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ будет сумма вида $\sum_{i=0}^{\infty} z_i p^i$, где $0 \leqslant z_i \leqslant p-1$ - i-я цифра с конца, в p-ичном представлении α_N, для достаточно большого N.

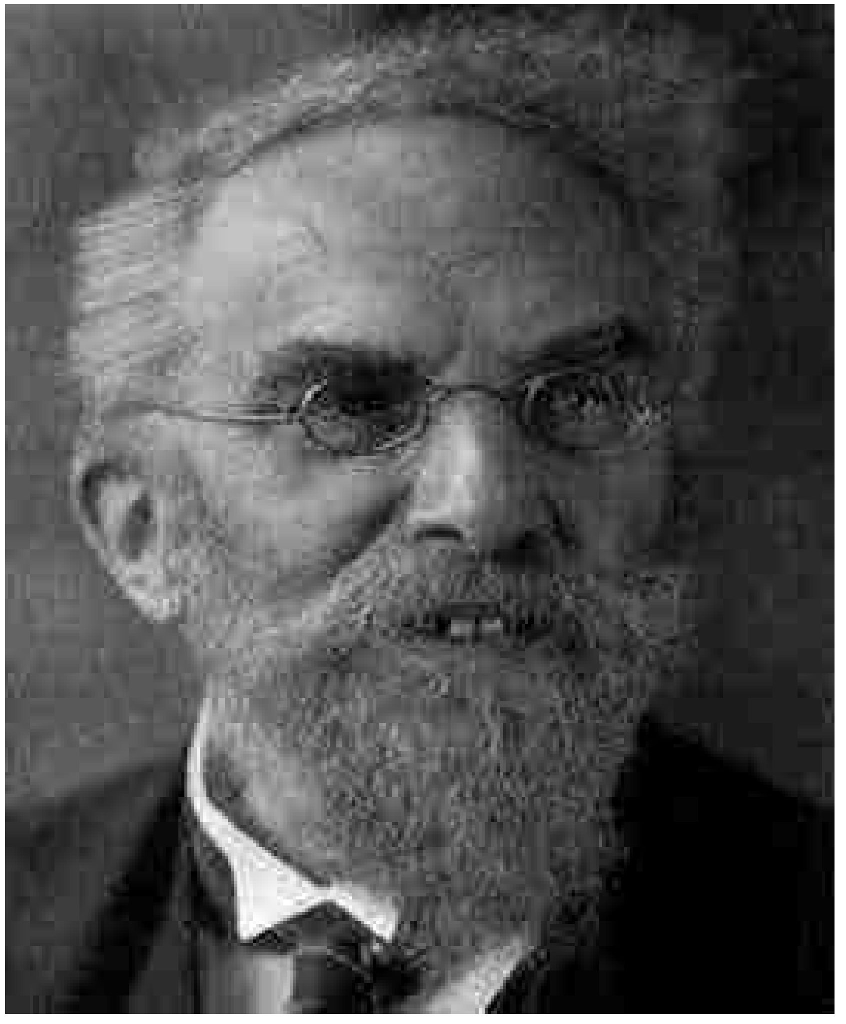
Любое целое p-адическое число записывается в p-ичной системе счисления последовательностью цифр, бесконечной влево.

$$\ldots 5402510251025410251405150162126161611102002020315610310$$

p-адические числа можно складывать и умножать в столбик, не забывая переносить переполнение в следующий регистр.

Для каждого n, не делящегося на p, уравнение $nx = 1 \mod p$ имеет целое решение. Пусть $y := 1 - nx$. Очевидно, $\nu(y) \leqslant \frac{1}{p}$. Сумма вида $1 + y + y^2 + y^3 + \ldots$ сходится к $\frac{1}{xn}$. Поэтому $\frac{1}{n} = x + yx + y^2x + y^3x + \ldots$. Таким образом, **в кольце целых p-адических чисел определено деление на любое n, взаимно простое с p.**

p-адические числа изобрел в 1897 году Курт Гензель.



Kurt Hensel
(1861 – 1941)