Топология 9: Компактность.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Компактность и хаусдорфовость

Определение 9.1. Пусть M – топологическое пространство. Назовем **покрытием** M любой набор открытых подмножеств $U_i \subset M$ (возможно, бесконечный, или даже несчетный), для которого $M = \bigcup U_i$. Пространство M называется **компактным**, или просто **компактом**, если из каждого открытого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие. Подмножество $Z \subset M$ топологического пространства M называется компактным, если оно компактно в индуцированной топологии.

Задача 9.1. Когда компактно множество с дискретной топологией? С кодискретной топологией?

Задача 9.2. Пусть Z компактно, а $Z' \subset Z$ замкнуто в Z. Докажите, что Z' тоже компактно. Следует ли из компактности подмножества его замкнутость?

Задача 9.3. Пусть топологическое пространство M хаусдорфово, Z – произвольное подмножество M, а $x \notin Z$ – любая точка. Докажите, что у Z есть такое открытое покрытие $\{U_i\}$, что замыкание каждого U_i не содержит x.

Задача 9.4 (!). Пусть M хаусдорфово. Докажите, что любое компактное подмножество в M замкнуто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.5. Даны два компактных подмножества хаусдорфова пространства. Докажите, что у них есть непересекающиеся открытые окрестности.

Задача 9.6 (!). Дано компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что оно *нормально*, т.е. для него выполняется условие отделимости T4 (это значит, что любые два непересекающиеся замкнутые подмножества имеют непересекающиеся открытые окрестности).

Задача 9.7 (**). Существует ли компактное, хаусдорфово, неметризуемое топологическое пространство?

Определение 9.2. Топологическое пространство называется **локально компактным**, если у каждой точки есть окрестность, замыкание которой компактно.

Задача 9.8. Дано локально компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнено условие отделимости T3.

Задача 9.9. Дано хаусдорфово топологическое пространство X. Обозначим через $\widehat{X}$ множество $X \bigcup \{\infty\}$ (X, к которому добавили еще одну точку, обозначенную как ∞) со следующей топологией: $U \subset \widehat{X}$ открыто либо если $\infty \in U$, а дополнение к U компактно как подмножество X, либо если $\infty \notin X$, и U открыто как подмножество X. Докажите, что это действительно топология, и пространство $\widehat{X}$ компактно.

Определение 9.3. Пространство $\widehat{X}$ называется **одноточечной компактификацией** пространства X.

Задача 9.10 (*). Всегда ли $\widehat{X}$ хаусдорфово?

Задача 9.11. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с естественной топологией. Докажите, что $\widehat{X}$ гомеоморфно n-мерной сфере.

Дискретные подмножества и секвенциальная компактность

Задача 9.12. Дано хаусдорфово топологическое пространство M, и подмножество Z в нем. Докажите, что следующие условия эквивалентны.

(a) У любой точки $z \in Z$ существует окрестность $U \ni z$, не содержащая других точек из Z.

(b) M индуцирует на Z дискретную топологию.

(c) Z не содержит своих предельных точек.

Определение 9.4. Замкнутое подмножество $Z \subset M$, удовлетворяющее одному из условий задачи 9.12, называется **дискретным**.

Задача 9.13. Пусть у хаусдорфова топологического пространства $Z \subset M$ есть бесконечное дискретное подмножество. Докажите, что M некомпактно.

Определение 9.5. Пусть дан набор Z_i подмножеств множества M. Будем говорить, что этот набор множеств **монотонный**, если для любых Z_i, Z_j из нашего набора $Z_i \subset Z_j$ или $Z_j \subset Z_i$.

Задача 9.14. Докажите, что если топологическое пространство M компактно, то любой монотонный набор непустых замкнутых подможеств $Z_i \subset M$ имеет непустое пересечение $\cap_i Z_i$.

Задача 9.15. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M компактно тогда и только тогда, когда у M нет бесконечных дискретных подмножеств.

Указание. Если M содержит бесконечное дискретное подмножество, из задачи 9.14 следует, что M некомпактно. Если, наоборот, M некомпактно, то у M есть счетное покрытие $S = \{U_i\}$, такое, что никакое конечное подмножество S не покрывает M. Заменив U_i на объединение всех $U_j, j \geqslant i$, можно считать, что $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset ...$, причем ни один из U_i не содержит M. Взяв дополнения получаем набор замкнутых подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset ...$, с нулевым пересечением. Возьмите в каждом A_i точку, докажите, что получится дискретное множество.

Задача 9.16 (!). Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность точек из M имеет предельную точку.

Замечание. Это свойство называется **слабой секвенциальной компактностью**.

Задача 9.17 (**). Существует ли слабо секвенциально компактное, некомпактное хаусдорфово пространство?

Функции на компактах

Задача 9.18 (!). Пусть $f: M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что для любого компактного подмножества $Z \subset M$, $f(Z)$ всегда компактно.

Задача 9.19. Пусть $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что f достигает максимума и минимума на любом компактном подмножестве M.

Указание. Воспользуйтесь тем, что образ компакта - компакт.

Задача 9.20. Пусть $f: M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств, M компактно, а N хаусдорфово. Докажите, что f переводит замкнутые множества в замкнутые.

Задача 9.21. Пусть $f: M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств, M компактно, а N хаусдорфово. Предположим, что f взаимно однозначно. Докажите, что f – гомеоморфизм.

Задача 9.22. Придумайте такое непрерывное взаимно однозначное отображение топологических пространств $f: M \longrightarrow N$, что M компактно, но f – не гомеоморфизм. (N не хаусдорфово).

Компакты и произведения

Определение 9.6. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ топологических пространств называется **собственным**, если для каждого компактного $K \subset Y$ прообраз $f^{-1}(K) \subset X$ компактен.

Задача 9.23 (!). Пусть X, Y – компактные топологические пространства. Докажите, что произведение $X \times Y$ компактно.

Указание. Воспользовавшись тем, что множества вида $U \times V$, U открыто в X, V открыто в Y задают базу топологии на $X \times Y$, докажите сначала, что достаточно рассматривать покрытия $X \times Y$ множествами такого вида. Затем для каждой точки $y \in Y$ выберите конечное подпокрытие подмножества $X \times \{y\} \subset X \times Y$, состоящее из каких-то множеств $U_i \times V_i$, и заметьте, что множества $V_y = \cap V_i$ образуют открытое покрытие пространства Y.

Задача 9.24. Пусть дана последовательность $a_i(n)$ отображений из $\mathbb{N}$ в $[0, 1]$. Докажите, что можно выбрать такую подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots$, что $\{a_{i_k}(n)\}$ сходится для любого n.

Задача 9.25 (!). Выведите из этого, что тихоновский куб $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ компактен.

Задача 9.26 (*). Дано топологическое пространство M. Пусть задано такое (возможно, несчетное) множество $\{V_\alpha\}$ покрытий M, что каждое V_α содержит $V_{\alpha'}$ либо содержится в нем (иначе говоря, $\{V_\alpha\}$ – набор покрытий, получающихся друг из друга присоединением каких-то элементов). Пусть из каждого V_α нельзя выбрать конечное подпокрытие. Докажите, что из объединения всех V_α тоже нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Задача 9.27 (*). Используя лемму Цорна, докажите, что у всякого некомпактного подмножества $X \subset M$ найдется покрытие $\{V_\alpha\}$, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия, а если добавить к $\{V_\alpha\}$ любое не содержащееся в нем открытое множество, то из полученного покрытия можно будет выбрать конечное подпокрытие.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Мы будем называть такие покрытия **максимальными**.

Задача 9.28 (*). Пусть дано максимальное покрытие $\{V_\alpha\}$ некомпактного топологического пространства M. Докажите, что если открытые множества U_1, U_2 не лежат в $\{V_\alpha\}$, и их пересечение непусто, то оно тоже не лежит в $\{V_\alpha\}$. Докажите, что любое непустое конечное пересечение открытых множеств, не лежащих в $\{V_\alpha\}$, тоже не принадлежит $\{V_\alpha\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.29 (*). Пусть в топологическом пространстве M задана предбаза топологии R. Пусть дано некомпактное подмножество $X \subset M$ и максимальное покрытие $\{V_\alpha\}$. Докажите, что в $\{V_\alpha\}$ можно выбрать подпокрытие из R.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Мы получили следующую теорему (теорема Александера о предбазе). Пусть в топологическом пространстве M задана предбаза топологии S. Тогда подмножество $X \subset M$ компактно тогда и только тогда, когда из любого покрытия X элементами из S можно выбрать конечное подпокрытие. Теорема Александера использует аксиому выбора и (как показал Кэли) эквивалентна ей.

Задача 9.30 (*). Выведите из этого, что тихоновский куб $[0,1]^I$ компактен для любого множества I.

Указание. Рассмотрите предбазу для топологии на тихоновском кубе, составленную из подмножеств вида $[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times]a,b[\times [0,1] \times \ldots$ (на одном месте стоит открытый интервал). Воспользуйтесь теоремой Александера.

Замечание. Компактность тихоновского куба эквивалентна такому утверждению. Рассмотрим пространство $\operatorname{Map}(I,[0,1])$ отображений из множества I в отрезок $[0,1]$, с топологией поточечной сходимости. Тогда $\operatorname{Map}(I,[0,1])$ компактно. В частности, из любой последовательности $\{a_i(x)\}$ отображений можно выбрать такую подпоследовательность $\{a_{i_k}(x)\}$, что $\{a_{i_k}(x)\}$ сходится в любом $x \in I$.

Определение 9.7. Пусть M – топологическое пространство, I – некоторое множество, а M^I – пространство отображений из I в M, то есть произведение I копий M. Для $x \in I$ и открытого множества $U \subset M$ рассмотрим подмножество $U(x) \subset M^I$, состоящее из всех отображений, переводящих x в U. Определим на M^I топологию с предбазой, состоящей из всех $U(x)$. Такая топология называется **тихоновской** (также **слабой** или **топологией поточечной сходимости**).

Задача 9.31 (*). Пусть M компактно. Выведите из теоремы Александера, что M^I с тихоновской топологией компактно.