

Топология 7: Произведение топологических пространств.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшем k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

База топологии

Определение 7.1. Пусть дано топологическое пространство M и набор B из открытых подмножеств в M . Набор B называется **предбазой** для топологии на M , если любое открытое множество можно получить (возможно, бесконечным) объединением конечных пересечений открытых подмножеств, принадлежащих B , и **базой**, если любое открытое множество можно получить как объединение подмножеств, лежащих в B . У топологии на M есть **счетная база**, если есть база топологии, состоящая из счетного набора подмножеств.

Задача 7.1. Рассмотрим \mathbb{R} с дискретной топологией. Докажите, что в нем нет счетной предбазы.

Задача 7.2 (!). Пусть задано топологическое пространство M со счетной предбазой. Докажите, что у M есть счетная база.

Задача 7.3 (*). Дано конечное множество M , $|M| = 2^n$, с дискретной топологией, а B – предбаза в M . Докажите, что $|B| \geq n$. Найдите предбазу, в которой $2n$ элементов.

Задача 7.4. Рассмотрим \mathbb{R} с естественной топологией, и пусть B – множество всех интервалов, у которых концы – конечные двоичные дроби. Докажите, что это база в топологии \mathbb{R} .

Задача 7.5. Пусть дан набор подмножеств B в множестве M , такой, что $\cup B = M$. Рассмотрим все подмножества, которые можно получить из элементов B , а также M и \emptyset конечными пересечениями и произвольными объединениями. Докажите, что получится топология на M .

Определение 7.2. Такая топология называется **топологией, заданной предбазой B** .

Определение 7.3. Пусть M_1, M_2 – топологические пространства. Рассмотрим топологию S на $M_1 \times M_2$, заданную предбазой из подмножеств вида $U_1 \times M_2, M_1 \times U_2$, где U_1, U_2 открыты в M_1, M_2 . Тогда $(M_1 \times M_2, S)$ называется **произведением M_1 и M_2** .

Задача 7.6. Докажите, что естественная проекция $M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ непрерывна. Докажите, что множества вида $U_1 \times U_2$ задают базу в топологии на $M_1 \times M_2$.

Задача 7.7. Даны отображения топологических пространств $X \xrightarrow{\gamma_1} M_1, X \xrightarrow{\gamma_2} M_2$. Докажите, что они непрерывны тогда и только тогда, когда произведение

$$X \xrightarrow{\gamma_1 \times \gamma_2} M_1 \times M_2$$

непрерывно.

Задача 7.8. Пусть M_1, M_2 удовлетворяет условию из списка, приведенного ниже. Докажите, что $M_1 \times M_2$ удовлетворяет тому же условию.

- а. Свойство отделимости T1.
- б. Условие Хаусдорфа (T2).
- в. Свойство отделимости T3.
- г. Сепарабельность.
- д. Наличие счетной базы окрестностей у каждой точки.
- е. Наличие счетной базы.

Задача 7.9 ().** Верно ли это для аксиомы отделимости T4?

Определение 7.4. Отображение

$$x \xrightarrow{\Delta} (x, x) \in X \times X$$

называется **диагональным вложением**, его образ – **диагональю** в $X \times X$.

Задача 7.10. Докажите, что диагональное вложение является гомеоморфизмом на свой образ (топология на $\Delta \subset X \times X$ предполагается индуцированной с $X \times X$).

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.7.

Задача 7.11 (!). Докажите, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ замкнута в $X \times X$.

Задача 7.12. Докажите, что топология на X дискретна тогда и только тогда, когда диагональ открыта в $X \times X$.

Задача 7.13. Пусть график $\Gamma \subset X \times Y$ отображения топологических пространств $X \xrightarrow{\gamma} Y$ замкнут. Верно ли, что γ непрерывно?

Задача 7.14 (!). Пусть $X \xrightarrow{\gamma} Y$ – морфизм топологических пространств, причем Y хаусдорфово. Докажите, что график γ замкнут.

Задача 7.15. Пусть M_1, M_2 – метрические пространства, $M = M_1 \times M_2$ – их произведение, а d – одна из перечисленных ниже функций на $M \times M$. Докажите, что d задает метрику на M .

- $d((m_1, m_2), (m'_1, m'_2)) = d(m_1, m'_1) + d(m_2, m'_2)$
- $d((m_1, m_2), (m'_1, m'_2)) = \max(d(m_1, m'_1), d(m_2, m'_2))$
- $d((m_1, m_2), (m'_1, m'_2)) = \sqrt{d(m_1, m'_1)^2 + d(m_2, m'_2)^2}$

Задача 7.16 (!). Докажите, что три метрические структуры из предыдущей задачи задают на $M_1 \times M_2$ одну и ту же топологию. Докажите, что эта топология эквивалентна топологии произведения на $M_1 \times M_2$, которое рассматривается как произведение топологических пространств.

Тихоновский куб и гильбертов куб

Определение 7.5. Пусть I – некоторый набор индексов (возможно, несчетный), а $M = X^I$ – множество отображений из I в фиксированное топологическое пространство X . На X^I можно смотреть как на множество последовательностей точек X , индексированное I , либо как на бесконечное произведение X с собой. Обозначим через $W(i, U) \subset X^I$ множество всех отображений $I \rightarrow X$, переводящих заданный индекс i в элемент из подмножества $U \subset X$. Зададим предбазу B топологии на X^I таким образом: $U \in B$, если $U = W(i, U)$ для какого-то индекса $i \in I$ и какого-то открытого подмножества $U \subset X$. Такая топология называется **слабой**, или **тихоновской**.

Задача 7.17 (!). Дана последовательность точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ в X^I . Докажите, что она сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\alpha_k(i)$ сходится для каждого индекса $i \in I$.

Замечание. Утверждение предыдущей задачи часто формулируют так: “пространство X^I со слабой топологией есть множество отображений из I в X , с топологией поточечной сходимости”.

Определение 7.6. Пусть I – некоторый набор индексов. Пространство $[0, 1]^I$ со слабой топологией называется **тихоновским кубом**.

Задача 7.18. Пусть на топологическом пространстве M задан набор непрерывных функций $\alpha_i : M \rightarrow [0, 1]$, проиндексированных набором индексов I . Докажите, что отображение

$$\prod \alpha_i : m \rightarrow \prod_{i \in I} \alpha_i(m)$$

в тихоновский куб $[0, 1]^I$ непрерывно.

Задача 7.19. Докажите, что любая точка тихоновского куба замкнута.

Задача 7.20. Докажите, что топология на тихоновском кубе хаусдорфова.

Задача 7.21 (!). Дан тихоновский куб $[0, 1]^I$, где I счетно. Докажите, что у него есть счетная база.

Указание. Докажите, что совокупность всех $U = W(i,]a, b[)$ с рациональными a, b задает счетную предбазу в $[0, 1]^I$, и воспользуйтесь задачей 7.2.

Задача 7.22 ().** Докажите, что если множество I имеет мощность континуума или больше, то тихоновский куб $[0, 1]^I$ несепарабелен.

Указание. Пусть задано счетное подмножество W хаусдорфова пространства. Докажите, что мощность замыкания W не больше континуума.

Задача 7.23. Рассмотрим множество $M = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ – множество последовательностей вещественных чисел в $[0, 1]$, индексированных \mathbb{N} . Рассмотрим функцию $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}) = \sqrt{\sum i^{-2} |\alpha_i - \beta_i|^2}.$$

Докажите, что эта функция хорошо определена и задает метрику на $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Определение 7.7. Метрическое пространство $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ с метрикой, построенной выше, называется **гильбертовым кубом**.

Задача 7.24 (*). Пусть задана последовательность $\{\alpha_i(n)\}$ точек в $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Докажите, что она сходится в тихоновской топологии тогда и только тогда, когда она сходится в топологии гильбертова куба.

Задача 7.25 (*). Выведите из этого, что тождественное отображение задает гомеоморфизм гильбертова куба и тихоновского куба.

Замечание. Мы получили, что если множество индексов I счетно, то тихоновский куб $[0, 1]^I$ метризуем.

Задача 7.26 (*). Докажите, что гильбертов куб компактен.

Задача 7.27 ().** Пусть множество индексов I несчетно. Будет ли тихоновский куб $[0, 1]^I$ метризуем?