Топология 6: Теорема Хопфа-Ринова.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Липшицевы функции

Определение 6.1. Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) - метрические пространства, а $C > 0$ - вещественное число. Отображение $f : M_1 \longrightarrow M_2$ называется **C-липшицевым**, если для любых $x, y \in M_1$,

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant C d_1(x, y).$$

Функция $M \longrightarrow \mathbb{R}$ на метрическом пространстве называется C-липшицевой, если соответствующее отображение C-липшицево относительно естественной метрики на M и $\mathbb{R}$.

Задача 6.1. Докажите, что расстояние $d_z(x) := d(z, x)$ до фиксированной точки $z \in M$ - 1-липшицева функция.

Задача 6.2. Докажите, что липшицевы функции непрерывны.

Определение 6.2. Пусть $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ – последовательность функций, таких, что $\lim_i f_i(x) = f(x)$ для какой-то функции f. В таком случае говорится, что f_i **поточечно сходится к** f.

Задача 6.3. Постройте последовательность f_i непрерывных функций на метрическом пространстве, поточечно сходящуюся к разрывной функции f.

Задача 6.4. Пусть f_i – последовательность C-липшицевых функций, поточечно сходящаяся к f. Докажите, что f непрерывна.

Расстояние между подмножествами метрических пространств

Определение 6.3. Пусть $X \subset M$ – подмножество метрического пространства, $y \in M$ точка. Определим $d(y, X) := \inf_{x \in X} d(x, y)$. Это число называется **расстоянием от y до X**.

Задача 6.5. Пусть $X \subset M$ – замкнутое подмножество, а $y \notin X$. Докажите, что $d(y, X) > 0$.

Задача 6.6. Пусть $X \subset M$, а X_1 – множество всех точек $y \in M$ таких, что $d(y, X) = 0$. Докажите, что X_1 есть замыкание X.

Определение 6.4. Пусть $X, X' \subset M$ – подмножества метрического пространства. Определим $d(X, X') := \inf_{x \in X} d(x, X')$. Это число называется **расстоянием от X до X'**.

Задача 6.7. Докажите, что $d(X, X') = d(X', X)$.

Задача 6.8. Докажите, что расстояние до множества задает 1-липшицеву функцию $M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Задача 6.9. Пусть $f: X \to \mathbb{R}^{>0}$ – непрерывная, положительная функция на компакте. Докажите, что существует $\varepsilon > 0$ такой, что $f > \varepsilon$ на X.

Задача 6.10 (!). Пусть $X, X' \subset M$ – непересекающиеся замкнутые подмножества в M, причем X компактно. Докажите, что $d(X, X') > 0$.

Указание. Докажите, что $d(x, X') : \quad X \longrightarrow \mathbb{R}$ задает непрерывную, положительную функцию на X, и воспользуйтесь компактностью X, чтобы доказать, что ее минимум положителен.

Задача 6.11. Постройте два непересекающихся, замкнутых подмножества $X, X' \subset M$ в метрическом пространстве таких, что $d(X, X') = 0$.

Задача 6.12. Пусть $X, X' \subset M$ – непересекающиеся компактные подмножества в метрическом пространстве M. Докажите, что у них есть непересекающиеся, открытые окрестности.

Локально компактные метрические пространства

Определение 6.5. Пусть M – метрическое пространство. Говорят, что M **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Задача 6.13. Докажите, что любое компактное метрическое пространство локально компактно.

Задача 6.14. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией локально компактно.

Задача 6.15 (*). Приведите пример полного, не локально компактного метрического пространства.

Задача 6.16. Пусть M – локально компактное метрическое пространство, а $\overline{B}_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар, который компактен. Докажите, что $\overline{B}_\varepsilon(x)$ содержится в открытом множестве Z, замыкание которого компактно.

Указание. Покройте $\overline{B}_\varepsilon(x)$ шарами, замыкание которых компактно, и выберите конечное подпокрытие.

Определение 6.6. Пусть (M, d) – метрическое пространство. Мы говорим, что M **удовлетворяет условию Хопфа-Ринова**, если для любых двух точек $x, y \in M$ и таких чисел $r_1, r_2 > 0$, что $r_1 + r_2 < d(x, y)$, имеем

$$d(B_{r_1}(x), B_{r_2}(y)) = d(x, y) - r_1 - r_2.$$

Задача 6.17 (!). Пусть M – локально компактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова, а $\overline{B}_\varepsilon(x)$ – компактный, замкнутый шар. Докажите, что для какого-то $\varepsilon' > 0$ замыкание открытого шара $B_{\varepsilon+\varepsilon'}(x)$ компактно.

Указание. Возьмите Z такое, как в предыдущей задаче. Возьмите $\varepsilon' = d(M \backslash Z, \overline{B}_\varepsilon(x))$.

Задача 6.18 (*). Пусть M – полное локально компактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова, $x \in M$ – точка, а $\varepsilon > 0$ – такое число, что $\overline{B}_{\varepsilon'}(x)$ компактен для всех $\varepsilon' < \varepsilon$. Докажите, что шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Указание. Пусть $\varepsilon_i < \varepsilon$ – последовательность, которая сходится к ε. Пользуясь условием Хопфа-Ринова, докажите, что $\{\overline{B}_{\varepsilon_i}(x)\}$ – последовательность Коши в смысле метрики Хаусдорфа, и сходится к $\overline{B}_\varepsilon(x)$. Воспользуйтесь тем, что предел такой последовательности компактен.

Задача 6.19 (*). (Теорема Хопфа-Ринова, I) Пусть M – полное локально компактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова. Докажите, что каждый замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ в M компактен.

Задача 6.20. Пусть M – такое метрическое пространство, что каждый замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ в M компактен. Докажите, что M полно.

Задача 6.21. Пусть M – метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова, $x, y \in M$. Предположим, что все замкнутые шары в M компактны. Докажите, что есть такая точка $z \in M$, что $d(x, z) = d(y, z) = \frac{1}{2} d(x, y)$.

Задача 6.22 (*). Пусть S – множество всех рациональных чисел вида $\frac{n}{2^k}$, $n \in \mathbb{Z}$ на отрезке $[0,1]$. В условиях предыдущей задачи, докажите, что существует такое отображение $S \xrightarrow{\xi} M$, что $d(\xi(a), \xi(b)) = |a-b|d(x,y)$, причем $\xi(0) = x$, а $\xi(1) = y$.

Задача 6.23 (*). (Теорема Хопфа-Ринова, II) Пусть M – локально компактное полное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова, $x, y \in M$. Докажите, что отображение ξ можно естественно продолжить на пополнение S относительно стандартной метрики, получив такое отображение $[0,1] \xrightarrow{\overline{\xi}} M$, что $\overline{\xi}(0) = x$, $\overline{\xi}(1) = y$, и для всякой пары вещественных числа $a, b \in [0,1]$ имеем $d((\overline{\xi}(a), \overline{\xi}(b)) = |a-b|d(x,y)$.

Замечание. Такое отображение называется **геодезическим**. Теорему Хопфа-Ринова можно сформулировать так – для любых двух точек в полном метрическом локально компактном пространстве, удовлетворяющим условию Хопфа-Ринова, найдется геодезическая, которая их соединяет.

Определение 6.7. Такое пространство называется **геодезически связным**

Задача 6.24 (*). Пусть $V = \mathbb{R}^n$ – векторное пространство со стандартной (евклидовой) метрикой. Докажите, что геодезические в V – это отрезки (множества вида $ax + (1-a)y$, где a пробегает отрезок $[0,1] \subset \mathbb{R}$, а $x, y \in V$).

Задача 6.25 (**). Пусть d – метрика на $\mathbb{R}^n$, ассоциированная с нормой $(x_1, x_2, ...) \mapsto \max |x_i|$. Докажите, что она удовлетворяет условию Хопфа-Ринова. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с такой метрикой геодезически связно. Опишите все геодезические.

Задача 6.26 (**). Пусть d – метрика на $\mathbb{R}^n$, ассоциированная с нормой $(x_1, x_2, ...) \mapsto \sum |x_i|$. Докажите, что она удовлетворяет условию Хопфа-Ринова. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с такой метрикой геодезически связно. Опишите все геодезические.

Задача 6.27 (*). Верно ли, что метрика d, определенная нормой, всегда удовлетворяет условию Хопфа-Ринова?