Топология 5: Топология в метрических пространствах.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Топология на метрических пространствах

Замечание. В этом листке, все пространства подразумеваются по умолчанию метрическими.

Определение 5.1. Пусть M – метрическое пространство, $X \subset M$ подмножество. Подмножество X называется **открытым**, если оно вместе с каждой точкой содержит некоторый ε-шар с центром в этой точке, и **замкнутым**, если дополнение к X открыто.

Задача 5.1. Докажите, что X открыто тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $\{a_i\}$, которая сходится к $x \in X$, все a_i, кроме конечного числа, содержатся в X.

Задача 5.2. Докажите, что объединение любого количества открытых множеств открыто. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Задача 5.3. Докажите, что замкнутый шар

$$\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant \varepsilon\}$$

всегда замкнут.

Задача 5.4. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Определение 5.2. Замыкание множества $A \subset M$ есть объединение A и всех предельных точек A.

Задача 5.5. Дано метрическое пространство, а в нем открытый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ и замкнутый шар $B_\varepsilon(x)$. Всегда ли $\overline{B}_\varepsilon(x)$ – замыкание $B_\varepsilon(x)$? Докажите, что замыкание любого подмножества всегда замкнуто.

Задача 5.6. Пусть A – подмножество в M не имеющее предельных точек (такое подмножество называется **дискретным**). Докажите, что $M \backslash A$ открыто.

Определение 5.3. Пусть M – метрическое пространство, а $\varepsilon > 0$ – число. Пусть $R \subset M$ таково, что M покрывается объединением всех ε-шаров с центрами в R. Тогда R называется **ε-сетью**.

Задача 5.7. Пусть каждая последовательность в M имеет предельную точку. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.

Указание. Пусть такой сети нет; тогда для каждого конечного множества R найдется точка x, отстоящая от R больше, чем на ε. Присоединим x к R, воспользуемся индукцией, и мы получим бесконечное дискретное подмножество в M.

Компакты в метрических пространствах

Определение 5.4. Пусть $X \subset M$ – подмножество, а $U_i \subset M$ – набор открытых подмножеств. Говорят, что U_i – **покрытие** X, если $X \subset \bigcup U_i$. Если из $\{U_i\}$ выкинуть какое-то количество открытых множеств, и оно останется покрытием, то, что получится, называется **подпокрытие**.

Задача 5.8. Пусть M – метрическое пространство, S – открытое покрытие M. Пусть каждая последовательность элементов M имеет предельную точку. Докажите, что тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что любой шар радиуса $< \varepsilon$ полностью содержится в одном из множеств покрытия S.

Указание. Пусть для каждого ε найдется точка x_ε, такая, что соответствующий ε-шар не содержится целиком ни в одном из множеств покрытия. Возьмем сходящуюся к нулю последовательность $\{\varepsilon_i\}$, и пусть x - предельная точка $\{x_{\varepsilon_i}\}$. Докажите, что x не содержится ни в одном из множеств покрытия S.

Задача 5.9 (!). (теорема Гейне-Бореля) Пусть X – метрическое пространство. Докажите, что следующие условия равносильны

а. Каждая последовательность точек из X имеет предельную точку в X.

б. Каждое покрытие X открытыми множествами имеет конечное подпокрытие.

Указание. Чтобы вывести (а) из (б), воспользуйтесь задачей 5.6. Чтобы вывести (б) из (а), возьмем любое покрытие S, число ε из задачи 5.8 и конечную ε-сеть. Каждый из шаров ε-сети содержится в каком-то из элементов $U_i \in S$. Докажите, что $\{U_i\}$ - конечное подпокрытие.

Определение 5.5. Пусть M, M' – метрические пространства, а $f: M \to M'$ – функция. Функция f называется **непрерывной**, если f переводит любую последовательность, сходящуюся к x, в последовательность, сходящуюся к $f(x)$, для каждого $x \in M$.

Задача 5.10 (!). Пусть X – любое подмножество в M. Докажите, что функция $f: M \to \mathbb{R}$, $x \overset{f}{\mapsto} d(x, X)$, непрерывна, где $d(x, X)$ (**расстояние от x до X**) определяется как $d(x, X) := \inf_{x' \in X} d(x, x')$.

Определение 5.6. Пусть M – метрическое пространство. Говорят, что M – **компакт**, или **компактное множество**, если выполнено любое из условий задачи 5.9. Заметим, что это условия не зависит от вложения $X \hookrightarrow M$, а зависит только от метрики на X.

Задача 5.11 (!). Рассмотрим пополнение $\mathbb{Z}$ относительно нормы ν_p, определенное выше (оно называется "кольцо целых p-адических чисел" и обозначается $\mathbb{Z}_p$). Докажите, что оно компактно.

Указание. Докажите, что любое p-адическое число можно представить в форме $\sum a_i p^i$, где a_i целое число от 0 до $p-1$.

Задача 5.12. Докажите, что компактное подмножество в M всегда замкнуто.

Указание. Докажите, что оно содержит все свои предельные точки.

Задача 5.13. Докажите, что замкнутое подмножество компакта всегда компактно.

Задача 5.14. Докажите, что объединение конечного числа компактных подмножеств компактно.

Задача 5.15 (!). Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция на компакте. Докажите, что f достигает максимума.

Определение 5.7. Подмножество $Z \subset M$ называется ограниченным, если оно содежится в шаре $B_r(x)$ для каких-то $r \in \mathbb{R}, x \in M$.

Задача 5.16. Пусть $Z \subset M$ компактно. Докажите, что оно ограниченно.

Определение 5.8. Пусть M – метрическое пространство, а $X \subset M$ – его подмножество. Объединение всех открытых ε-шаров с центрами во всех точках X называется **ε-окрестностью** X.

Расстояние Хаусдорфа

Определение 5.9. Пусть M – метрическое пространство, а X и Y – ограниченные его подмножества. **Расстояние Хаусдорфа** $d_H(X,Y)$ есть инфимум всех ε таких, что Y содержится в ε-окрестности X, а X содержится в ε-окрестности Y.

Задача 5.17 (!). Докажите, что расстояние Хаусдорфа задает метрику на множестве $\mathcal{M}$ всех замкнутых ограниченных подмножеств M.

Задача 5.18. Пусть X, Y – ограниченные подмножества M. Докажите, что

$$d_H(X,Y) = \max\left(\sup_{x\in X} d(x,Y), \sup_{y\in Y} d(y,X)\right).$$

Задача 5.19 (*). Пусть M – полное метрическое пространство. Докажите, что $\mathcal{M}$ тоже полно.

Указание. Рассмотрим последовательность Коши $\{X_i\}$ подмножеств M. Пусть $\mathfrak{S}$ – множество всех последовательностей Коши $\{x_i\}$ с $x_i \in X_i$. Пусть X – множество предельных точек последовательностей из $\mathfrak{S}$. Докажите, что $\{X_i\}$ сходится к X.

Задача 5.20 (*). Пусть $\{X_i\}$ – последовательность Коши компактных подмножеств в полном метрическом пространстве M, а X – ее предел. Докажите, что X компактен.

Задача 5.21 (!). M компактно, $X \subset$ – любое подмножество. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечное множество R такое, что $d_H(R, X) < \varepsilon$. (Это утверждение можно выразить так: "X допускает аппроксимацию конечными множествами, с заданной наперед точностью")

Указание. Найдите в X конечную ε-сеть.

Задача 5.22 (*). Пусть M компактно. Докажите, что $\mathcal{M}$ тоже компактно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Теорема Банаха о сжимающих отображениях

Определение 5.10. Пусть X – метрическое пространство, а $0 < k < 1$ – вещественное число. Отображение $f: X \to X$ называется **сжимающим с коэффициентом** k, если $kd(x, y) \geqslant d(f(x), f(y))$.

Задача 5.23. Пусть X – метрическое пространство, а $f: X \to X$ – сжимающее отображение. Докажите, что для каждого $x \in X$ последовательность $\{a_i\}$, $a_0 := x, a_1 := f(x), a_2 := f(f(x)), a_3 := f(f(f(x))), ...$ – последовательность Коши.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $d(a_i, a_{i+1}) = k^i d(x, f(x))$, и выведите из этого сходимость ряда $\sum d(a_i, a_{i+1})$

Задача 5.24 (!). (Теорема о сжимающих отображениях) Пусть X – полное метрическое пространство, а $f: X \to X$ – сжимающее отображение. Докажите, что f имеет неподвижную точку

Указание. Возьмите предел последовательности $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$.