Топология 4: Теоретико-множественная топология: пространства со счетной базой.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Плотные подмножества

Определение 4.1. Пусть $Z \subset M$ – подмножество в топологическом пространстве. Подмножество Z называется **плотным**, если Z пересекается с каждым непустым открытым подмножеством M.

Задача 4.1 (!). Докажите, что Z плотно тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{Z}$ есть все M.

Задача 4.2. Найдите все плотные подмножества в пространстве с дискретной топологией; с кодискретной топологией.

Задача 4.3. Докажите, что $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Определение 4.2. Подмножество Z в топологическом пространстве M называется **нигде не плотным**, если для любого открытого подмножества $U \subset M$, подмножество $Z \cap U$ не плотно в U.

Задача 4.4. Докажите, что замыкание нигде не плотного подмножества нигде не плотно.

Задача 4.5 (!). Докажите, что Z нигде не плотно тогда и только тогда, когда $M \backslash \overline{Z}$ плотно в M.

Задача 4.6 (*). Постройте континуальное нигде не плотное подмножество в отрезке $[0, 1]$ с естественной топологией.

Задача 4.7. Найдите все нигде не плотные подмножества в пространстве с дискретной топологией; в пространстве с кодискретной топологией.

Определение 4.3. Пусть M – топологическое пространство, $x \in M$ – произвольная точка. База окрестностей x – это такой набор B окрестностей x, что любая окрестность $U \ni x$ содержит какую-то окрестность из B.

Задача 4.8. Пусть в топологическом пространстве M задан такой набор открытых подмножеств B, что для любой точки $x \in M$, совокупность всех $U \in B$, содержащих x, образует базу окрестностей x. Докажите, что B – база топологии M.

Определение 4.4. Пусть M – топологическое пространство. На M можно наложить два условия счетности. Если у каждой точки M найдется счетная база окрестностей, то говорят, что в M **выполняется первая аксиома счетности**. Если у M найдется счетная база открытых множеств, то говорят, что для M выполняется **вторая аксиома счетности**, либо что M – **пространство со счетной базой**. Если в M найдется плотное счетное множество, то говорят, что M **сепарабельно**.

Задача 4.9. Дано пространство M с дискретной топологией. Докажите, что в M выполняется первая аксиома счетности.

Задача 4.10. Пусть топологическое пространство M имеет счетную базу. Докажите, что оно сепарабельно.

Задача 4.11 (*). Пусть метризуемое топологическое пространство M сепарабельно. Докажите, что M имеет счетную базу.

Задача 4.12 (!). Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что оно имеет счетную базу окрестностей в каждой точке.

Задача 4.13. Постройте несепарабельное метризуемое топологическое пространство.

Задача 4.14 (**). Приведите пример счетного хаусдорфова пространства без счетной базы.

4.1. Топология и сходимость

Топологические пространства были изобретены как язык, на котором удобно говорить о непрерывных функциях. В листке 2 мы определили непрерывную функцию как функцию, сохраняющую пределы сходящихся последовательностей. К топологии можно подходить с аксиоматической точки зрения, приведенной выше, либо с точки зрения геометрической интуиции, определяя топологию на пространстве посредством задания класса сходящихся последовательностей, а напрерывные отображения – как отображения, сохраняющие пределы.

Второй подход к топологии (при всех его очевидных преимуществах) наталкивается на теоретико-множественные трудности – если в нашем пространстве нет счетной базы, приходится пользоваться полностью упорядоченными несчетными последовательностями. В дальнейшем мы будем работать в основном в пространствах со счетной базой окрестностей точки, и в такой ситуации весьма удобно определять топологию и непрерывность через пределы последовательностей.

Определение 4.5. Пусть M – топологическое пространство, $Z \subset M$ – бесконечное подмножество. Точка $x \in M$ называется **предельной точкой** для Z, если в каждой окрестности x содержится $z \in Z$. **Пределом** последовательности $\{x_i\}$ называется такая точка x, что в любой окрестности x содержатся почти все x_i. Последовательность называется **сходящейся**, если у ней есть предел.

Задача 4.15. Найдите все сходящиеся последовательности в пространстве с дискретной топологией. В пространстве с кодискретной топологией.

Задача 4.16. Пусть M – хаусдорфово. Докажите, что у любой последовательности есть не более одного предела.

Задача 4.17 (*). Верно ли обратное (т.е. вытекает ли хаусдорфовость из единственности предела)? А если в M есть счетная база окрестностей точки?

Задача 4.18. Пусть в M предел любой последовательности единственен. Докажите, что в M выполнено условие отделимости T1.

Задача 4.19. Пусть задано непрерывное отображение $f: M \longrightarrow M'$ и некоторое подмножество $Z \subset M$. Докажите, что f переводит предельные точки Z в предельные точки $f(Z)$. Докажите, что f переводит пределы в пределы.

Задача 4.20 (!). Пусть отображение переводит предельные точки любого множества в предельные точки его образа. Докажите, что оно непрерывно.

Задача 4.21. Пусть дано пространство M с счетной базой окрестностей у каждой точки. Рассмотрим произвольное подмножество $Z \subset M$. Докажите, что замыкание Z есть множество пределов всех последовательностей из Z.

Задача 4.22. Пусть даны пространства M, M' со счетной базой окрестностей у каждой точки, и отображение $f: M \longrightarrow M'$, сохраняющее пределы последовательностей. Докажите, что f непрерывно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 4.23 (!). Пусть $f: M \longrightarrow M'$ – отображение метризуемых топологических пространств. Докажите, что оно непрерывно тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности $\{x_i\} \in M$, предел $f(x_i)$ существует, и

$$f(\lim_{i \longrightarrow \infty} x_i) = \lim_{i \longrightarrow \infty} f(x_i)$$

Замечание. Это свойство называется **секвенциальной непрерывностью**. Утверждение последней задачи можно переговорить на этом языке как *для метризуемых пространств, секвенциальная непрерывность отображения равносильна его непрерывности.*

Задача 4.24 (*). Придумайте пример отображения хаусдорфовых топологических пространств $f: M \longrightarrow M'$, переводящего пределы последовательностей в пределы последовательностей, но не непрерывного.

Задача 4.25 (*). Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство вез счетной базы, $Z \subset M$ подмножество, а $\bar{Z}$ – его замыкание. Докажите, что любая точки $\bar{Z}$ является пределом какой-то последовательности из Z, или постройте контрпример.