Топология 3: Теоретико-множественная топология: аксиома Хаусдорфа.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Топологические пространства

Определение 3.1. Множество всех подмножеств M обозначается 2^M. **Топология** на M есть набор подмножеств $S \subset 2^M$, называемых **открытыми подмножествами**. Множество M называется **топологическим пространством**, а S – **топологией** на M, если выполнены следующие условия.

1. Пустое множество и само M открыты.
2. Объединение любого числа открытых подмножеств открыто.
3. Пересечение конечного числа открытых подмножеств открыто.

Отображение $\phi : M \longrightarrow M'$ топологических пространств называется **непрерывным**, если прообраз каждого открытого множества открыт. Непрерывные отображения также называются **морфизмами** топологических пространств. **Изоморфизм** топологических пространств – это такой морфизм $\phi : M \longrightarrow M'$, что существует морфизм $\psi : M' \longrightarrow M$, обратный к ϕ (т.е. $\phi \circ \psi$ и $\psi \circ \phi$ – тождественные морфизмы). Изоморфизм топологических пространств традиционно называется **гомеоморфизмом**.

Подмножество $Z \subset M$ называется **замкнутым**, если его дополнение открыто. **Окрестность** точки $x \in M$ – это любое открытое подмножество M, которое ее содержит. **Окрестность** подмножества $Z \subset M$ – это любое открытое подмножество , которое его содержит.

Задача 3.1. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

Задача 3.2. Пусть M – некоторое множество, а S – множество всех подмножеств M. Докажите, что S задает на M топологию. Эта топология называется **дискретной**. Опишите множество всех непрерывных отображений из M в заданное топологическое пространство.

Задача 3.3. Пусть M – некоторое множество, а S – множество из двух подмножеств M: пустого множества и самого M. Докажите, что S задает на M топологию. Эта топология называется **кодискретной**. Опишите множество всех непрерывных отображений из M в пространство с дискретной топологией.

Задача 3.4. Постройте непрерывную биекцию топологических пространств, которая не является гомеоморфизмом.

Задача 3.5. Дано подмножество Z топологического пространства M. Открытые подмножества в Z задаются пересечениями вида $Z \cap U$, где U открыто в Z. Докажите, что это задает топологию на Z. Докажите, что естественное вложение $Z \hookrightarrow M$ непрерывно.

Определение 3.2. Такая топология на $Z \subset M$ называется **индуцированной с** M. Подмножество любого топологического пространства мы будем рассматривать как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Определение 3.3. Пусть M – топологическое пространство, а S_0 – такой набор открытых множеств, что любое открытое множество можно получить как объединение множеств из S_0. Тогда S_0 называется **базой** M.

Задача 3.6. Опишите все базы для M с дискретной топологией; для M с кодискретной топологией.

Определение 3.4. Пусть M – метрическое пространство. Напомним, что подмножество $U \subset M$ называется **открытым**, если для каждой точки $u \in U$, U содержит шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в u.

Задача 3.7. Докажите, что это определение задает топологию на метрическом пространстве.

Определение 3.5. Топологическое пространство называется **метризуемым** если его можно получить из метрического пространства вышеописанным способом.

Задача 3.8. Докажите, что дискретное топологическое пространство метризуемо, а кодискретное – нет.

Задача 3.9. Докажите, что открытые шары в метрическом пространстве M открыты. Докажите, что открытые шары задают базу топологии на M.

Задача 3.10 (!). Пусть M – топологическое пространство, а S, S' – две топологии на M. Предположим, что для каждой точки $m \in M$ и окрестности $U' \ni m$, открытой в топологии S', найдется окрестность $U \ni m$, $U \subset U'$, открытая в топологии S. Докажите, что тождественное отображение $(M, S) \xrightarrow{i} (M, S')$ непрерывно. Приведите пример, когда i не является гомеоморфизмом.

Замечание. В такой ситуации иногда говорится, что топология, заданная S', **сильнее** топологии, заданной S.

Задача 3.11. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой ν, как в листке 1. Эта норма задает метрику, а следовательно, и топологию на $\mathbb{R}^n$. Обозначим эту топологию через S_ν. Предположим, что ν, ν' – такие две нормы, что для какой-то фиксированной константы $C \in \mathbb{R}$ всегда имеем $C^{-1}\nu'(x) < \nu(x) < C\nu'(x)$. Докажите, что тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.12 (*). Предположим, что ν, ν' – такие две нормы на $\mathbb{R}^n$, что тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$. Докажите, что найдется такая константа C, что $C^{-1}\nu'(x) < \nu(x) < C\nu'(x)$.

Задача 3.13 (*). Пусть V – конечномерное векторное пространство, наделенное положительно определенной билинейной формой g. Рассмотрим V как метрическое пространство, с метрикой d_g, построенной в листке 1. Обозначим соответствующую топологию через S_g. Докажите, что топология на V не зависит от выбора g, то есть что для любых g, g', тождественное отображение из V в себя задает гомеоморфизм $(V, S_g) \longrightarrow (V, S_{g'})$.

Задача 3.14 (**). Пусть V - конечномерное пространство с нормой ν. Докажите, что топология S_ν не зависит от выбора нормы ν: тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя всегда задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$. Верно ли это, когда V бесконечномерно?

Определение 3.6. Рассмотрим метрику d на $\mathbb{R}^n$, заданную нормой $|(\alpha_1, ...\alpha_n)| := \left(\sum_i \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Топология на $\mathbb{R}^n$, связанная с d, называется **естественной**. **Естественная топология** на подмножествах $\mathbb{R}^n$ – это топология, индуцированная с $\mathbb{R}^n$.

Задача 3.15. Рассмотрим $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Пусть M пространство с дискретной топологией, M' – пространство с кодискретной топологией. Найдите множество всех непрерывных отображений

а. Из $\mathbb{R}$ в M

б. Из M в $\mathbb{R}$

в. Из M' в $\mathbb{R}$

г. Из $\mathbb{R}$ в M'.

Задача 3.16. Пусть $\phi: M \longrightarrow M'$ – некоторое отображение топологических пространств. Верно ли, что если ϕ непрерывно, то прообраз любого замкнутого множества замкнут? Верно ли, что если прообраз любого замкнутого множества замкнут, то отображение непрерывно?

Задача 3.17. Приведите пример такого непрерывного отображение топологических пространств, что образ открытого множества не открыт. Приведите пример такого непрерывного отображение топологических пространств, что образ замкнутого множества не замкнут.

Определение 3.7. Пусть M – топологическое пространство, $Z \subset M$ – произвольное подмножество, $\overline{Z}$ – пересечение всех замкнутых подмножеств M, содержащих Z. Тогда $\overline{Z}$ называется **замыканием** Z.

Задача 3.18. Докажите, что $\overline{Z}$ замкнуто в M.

Условия отделимости

Определение 3.8. Пусть M – топологическое пространство. Следующие условия T0-T4 называются **условиями отделимости.**

T0. Пусть даны любые две несовпадающие точки $x, y \in M$, тогда по крайней мере у одной из них есть окрестность, которая не содержит другую.

T1. Любая точка M замкнута.

T2. Любые две различные точки x, $y \in M$ обладают окрестностями U_x, U_y, которые не пересекаются.

T3. В M верно T1. Кроме того, лля любой точки $y \in M$, любая окрестность $U \ni y$ содержит открытую окрестность $U' \ni y$, замыкание которой содержится в U.

T4. В M верно T1. Кроме того, для любого замкнутого подмножества $Z \subset M$, любая окрестность $U \supset Z$ содержит открытую окрестность $U' \supset Z$, замыкание которой содержится в U.

Условие T2 известно как **аксиома Хаусдорфа**. Топологическое пространство, удовлетворяющее условию T2, называется **хаусдорфовым**.

Задача 3.19. Докажите, что условие T1 эквивалентно следующему: для любых двух несовпадающих точек $x, y \in M$, найдется окрестность y, не содержащая x.

Задача 3.20. Докажите, что условие T4 эквивалентно следующему: у любых двух непересекающихся замкнутых множеств $X, Y \subset M$, найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 3.21. Выполняются ли условия T0-T4 в пространстве с дискретной топологией? С кодискретной?

Задача 3.22. Докажите, что условия T0-T4 выполняются в $\mathbb{R}$.

Задача 3.23. Докажите, что условие T0 следует из T1, а T1 следует из T2.

Задача 3.24. Приведите пример пространства, не удовлетворяющего условию T1. Приведите пример нехаусдорфова пространства, где все точки замкнуты.

Задача 3.25 (*). Приведите пример пространства, удовлетворяющего T1, и такого, что любые два непустых открытых множества пересекаются.

Задача 3.26 (*). Докажите, что из T3 следует T2.

Задача 3.27 (**). Приведите пример пространства, где выполняется T3, но не выполняется T4.

Задача 3.28. Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнены условия T1, T2, T3.

Задача 3.29 (*). Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнено условие T4.