ТОПОЛОГИЯ 2: Полные метрические пространства.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Полные метрические пространства.

Определение 2.1. Пусть (X, d) – метрическое пространство, а $\{a_i\}$ – последовательность точек из X. Последовательность $\{a_i\}$ называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется ε-шар в X, содержащий все a_i, кроме конечного числа.

Задача 2.1. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши в X. Докажите, что $\{d(a_i, b_i)\}$ – последовательность Коши в $\mathbb{R}$.

Определение 2.2. Пусть (X, d) – метрическое пространство, а $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши в X. Последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ называются **эквивалентными**, если последовательность $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$ – последовательность Коши.

Задача 2.2. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши в X. Докажите, что $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lim_{i\to\infty} d(a_i, b_i) = 0$.

Задача 2.3. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – эквивалентные последовательности Коши в X, а $\{c_i\}$ – еще одна последовательность Коши. Докажите, что

$$\lim_{i\to\infty} d(a_i, c_i) = \lim_{i\to\infty} d(b_i, c_i)$$

Задача 2.4 (!). Пусть (X, d) метрическое пространство, а $\overline{X}$ – множество классов эквивалентности последовательностей Коши. Докажите, что функция

$$\{a_i\}, \{b_i\} \mapsto \lim_{i\to\infty} d(a_i, b_i)$$

задает метрику на $\overline{X}$.

Определение 2.3. В такой ситуации, $\overline{X}$ называется **пополнением** X.

Задача 2.5. Рассмотрим естественное отображение $X \to \overline{X}$, $x \mapsto \{x, x, x, x, ...\}$. Докажите, что это вложение, которое сохраняет метрику.

Определение 2.4. Пусть A – подмножество в X. Элемент $c \in X$ называется **предельной точкой** подмножества A, если в любом открытом шаре, содержащем c, содержится бесконечное количество элементов A.

Задача 2.6. Дана последовательность Коши. Докажите, что у нее не может быть больше одной предельной точки.

Определение 2.5. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Мы говорим, что $\{a_i\}$ **сходится к** $x \in X$, или **имеет предел в** x (пишется $\lim_{i\to\infty} a_i = x$), если x – предельная точка $\{a_i\}$

Определение 2.6. Метрическое пространство (X, d) называется **полным**, если любая последовательность Коши в X имеет предел.

Задача 2.7 (!). Докажите, что пополнение метрического пространства полно.

Определение 2.7. Подмножество $A \subset X$ метрического пространства называется **плотным**, если в каждом открытом шаре в X содержится элемент из A.

Задача 2.8. Докажите, что X плотно в $\overline{X}$.

Задача 2.9 (!). Пусть R – кольцо, снабженное нормированием ν. Постройте сложение и умножение на пополнении R относительно метрики, соответствующей нормированию. Докажите, что $\overline{R}$ снабжено нормированием, продолжающем нормирование на R.

Определение 2.8. Нормированное кольцо $\overline{R}$ называется **пополнением** R **относительно нормирования** ν**.**

Задача 2.10 (*). Пусть R – нормированное кольцо, а $\overline{R}$ его пополнение. Предположим, что R – поле. Докажите, что $\overline{R}$ – тоже поле.

Задача 2.11. Докажите, что $\mathbb{R}$ получено пополнением $\mathbb{Q}$ относительно нормирования $q \mapsto |q|$. Можно ли это использовать в качестве еще одного определения $\mathbb{R}$?

Определение 2.9. Пополнение $\mathbb{Z}$ относительно нормирования ν_p называется **кольцо целых** p**-адических чисел**. Это кольцо обозначается $\mathbb{Z}_p$.

Задача 2.12. Пусть (X, d) – метрическое пространство, а $\{a_i\}$ – последовательность точек из X. Предположим, что ряд $\sum d(a_i, a_{i-1})$ сходится. Докажите, что $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Верно ли обратное?

Задача 2.13 (!). Докажите, что для любой последовательности целых чисел a_k ряд $\sum a_k p^k$ сходится в $\mathbb{Z}_p$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 2.14. Докажите, что $(1-p)(\sum_{k=0}^{\infty} p^k) = 1$ в $\mathbb{Z}_p$.

Задача 2.15. Докажите, что любое целое число, которое не делится на p, обратимо в $\mathbb{Z}_p$.

Определение 2.10. Пополнение $\mathbb{Q}$ относительно нормирования, полученного продолжением ν_p, обозначается $\mathbb{Q}_p$ и называется **(поле p-адических чисел)**.

Задача 2.16 (!). Дано $x \in \mathbb{Q}_p$. Докажите, что $x = \frac{x'}{p^k}$, где $x' \in \mathbb{Z}_p$.

Задача 2.17 (*). Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (здесь предел берется в $\mathbb{R}$, с обычной метрикой).

Определение 2.11. Нормирование ν кольца R называется **неархимедовым**, если $\nu(x+y) \leqslant \max(\nu(x), \nu(y))$ для всех x, y. В противном случае нормирование называется **архимедовым**.

Задача 2.18 (*). Пусть ν - нормирование в $\mathbb{Q}$. Докажите, что ν неархимедово тогда и только тогда, когда $\mathbb{Z}$ содержится в единичном шаре.

Указание. Воспользуйтесь пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Оцените $\sqrt[n]{((\nu(x+y)^n)}$ для больших n, воспользовавшись оценкой на биномиальные коэффициенты: $\nu(C_n^k) \leqslant 1$.

Задача 2.19. Пусть ν - неархимедово нормирование в $\mathbb{Z}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}$, состоящее из всех целых n с $\nu(n) < 1$. Выведите из неархимедовости, что $\mathfrak{m}$ это *идеал* в $\mathbb{Z}$ (идеал в кольце R есть подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения на элементы из R). Докажите, что идеал $\mathfrak{m}$ *простой* (**простой идеал** это такой идеал, что $xy \notin \mathfrak{m}$ для всех $x, y \notin \mathfrak{m}$).

Задача 2.20. Докажите, что любой идеал в $\mathbb{Z}$ имеет вид $\{0, \pm 1m, \pm 2m, \pm 3m, ...\}$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что любой простой идеал $\mathfrak{m}$ в $\mathbb{Z}$ имеет вид $\{0, \pm 1p, \pm 2p, \pm 3p, ...\}$, где $p = 0, 1$ либо p простое.

Указание. Воспользуйтесь алгоритмом Евклида.

Задача 2.21 (*). Пусть ν – неархимедово нормирование $\mathbb{Q}$, а $\mathfrak{m} = \{0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \pm 4p, ...\}$ – идеал, построенный выше. Докажите, что существует такое вещественное число $\lambda > 1$, что $\nu(n) = \lambda^{-k}$ для каждого $n = p^k r$, $r \not\vdots p$.

Задача 2.22. Пусть ν – такое нормирование $\mathbb{Q}$, что $\nu(2) \leqslant 1$. Докажите, что $\nu(a) < \log_2(a) + 1$ для любого целого $a > 0$.

Указание. Воспользуйтесь представлением числа N в двоичной системе счисления.

Задача 2.23 (*). Пусть ν – такое нормирование $\mathbb{Q}$, что $\nu(2) \leqslant 1$. Докажите, что $\nu(a) \leqslant 1$ для любого целого $a > 0$ (т.е. ν неархимедово).

Указание. Выведите из $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Воспользовавшись предыдущей задачей, получите $\lim\limits_{N\to\infty} \nu(a^N) \leqslant 1$.

Задача 2.24 (*). Пусть a_i – последовательность Коши рациональных чисел вида $\frac{x}{2^n}$ (“последовательность Коши” здесь понимается в обычном смысле, то есть как в вещественных числах). Предположим, что нормирование ν на $\mathbb{Q}$ архимедово. Докажите, что $\nu(a_i)$ - последовательность Коши.

Указание. Записав x в двоичной системе счисления, докажите, что

$$\nu(x/2^n) \leqslant \nu(2)^{\log_2(x)+1}/\nu(2)^n \leqslant \nu(2)^{\log_2(x+1)-n}.$$

Задача 2.25 (*). Выведите из этого, что нормирование ν продолжается до непрерывной функции на $\mathbb{R}$, которая удовлетворяет $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$. Докажите, что ν получается как $x \mapsto |x|^\lambda$ для какой-то константы $\lambda > 0$. Выразите λ через $\nu(2)$.

Мы получили полную классификацию нормирований на $\mathbb{Q}$: любое нормирование получается как степень p-адического нормирования либо модуля. Эта классификация называется **теорема Островского**.