Топология 10: Связность.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Компоненты связности

Определение 10.1. Пусть дано топологическое пространство M. Подмножество $W \subset M$ называется **открытозамкнутым**, если оно открыто и замкнуто. M называется **связным**, если любое открытозамкнутое подмножество M это либо $\emptyset$, либо само M. Подмножество $Z \subset M$ называется **связным**, если оно связно в индуцированной топологии.

Задача 10.1. Связно ли $\mathbb{R}$?

Задача 10.2 (!). Пусть X, Y связные. Докажите, что $X \times Y$ связно.

Указание. Пусть в $X \times Y$ есть открытозамкнутое подмножество. Рассмотрим пересечение $U \cap X \times \{y\}$. Докажите, что $X \times \{y\}$ (с индуцированной топологией) гомеоморфно X, а $U \cap X \times \{y\}$ открытозамкнуто там.

Задача 10.3. Связно ли $\mathbb{R}^n$ (с естественной топологией)?

Задача 10.4. Пусть в топологическом пространстве M любые две точки x, y можно “соединить путем”, то есть найти такое непрерывное отображение $[0,1] \xrightarrow{\phi} M$, что $\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$. Докажите, что M связно.

Замечание. В такой ситуации M называется **линейно связным**.

Задача 10.5. Выкинем точку из окружности или плоскости. Докажите, что получится связное пространство.

Задача 10.6 (!). a. Выкинем конечное число точек из $\mathbb{R}^2$. Докажите, что получится связное пространство.

б. Выкинем точку из интервала. Докажите, что получится несвязное пространство.

Задача 10.7 (!). Докажите, что следующие пространства попарно негомеоморфны: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, окружность.

Задача 10.8 (!). Докажите, что отрезок, интервал и полуинтервал попарно негомеоморфны.

Задача 10.9. Дано непрерывное отображение $f: X \longrightarrow Y$. Пусть X связно. Докажите, что образ f связен.

Задача 10.10 (!). Дано связное подмножество в отрезке $[0,1]$. Докажите, что это интервал, полуинтервал или отрезок.

Задача 10.11. Дано непрерывное отображение $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Пусть X связно, а f принимает и положительные, и отрицательные значения. Докажите, что f где-то зануляется.

Задача 10.12. Пусть дано метризуемое счетное связное пространство M. Докажите, что M это точка.

Задача 10.13. Пусть даны связные подмножества топологического пространства M, пересечение которых непусто. Докажите, что их объединение связно.

Задача 10.14 (!). Пусть $x \in M$ – точка в топологическом пространстве, а W – объединение всех связных подмножеств, которые ее содержат. Докажите, что W связно.

Определение 10.2. В такой ситуации, W называется **компонентой связности** точки x (или просто **компонентой связности**).

Задача 10.15. Докажите, что связное подмножество $W \subset M$ есть компонента связности тогда и только тогда, когда любое связное подмножество, содержащее W, с ним совпадает.

Задача 10.16. Докажите, что M разбивается в объединение непересекающихся компонент связности.

Задача 10.17. Докажите, что все компоненты связности M замкнуты.

Вполне несвязные пространства

Определение 10.3. Топологическое пространство M называется **вполне несвязным**, если любая компонента связности M состоит из одной точки.

Задача 10.18. Докажите, что множество рациональных чисел (с топологией, индуцированной с $\mathbb{R}$) вполне несвязно. Докажите, что оно не дискретно.

Задача 10.19 (*). Докажите, что пространство p-адических чисел вполне несвязно.

Задача 10.20. Пусть дано хаусдорфово топологическое пространство с предбазой S. Пусть все элементы S открытозамкнуты. Докажите, что S вполне несвязно.

Задача 10.21 (!). Рассмотрим множество $\{0,1\}$ с дискретной топологией, и пусть $\{0,1\}^I$ – произведение I копий $\{0,1\}$ с тихоновской топологией, где I – произвольный набор индексов. Докажите, что $\{0,1\}^I$ вполне несвязно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.22. Пусть дано открытое подмножество компактного пространства U и набор замкнутых подмножеств $\{K_i\}$, пересечение которых содержится в U. Докажите, что из $\{K_i\}$ можно выбрать конечный поднабор, пересечение элементов которого содержится в U.

Задача 10.23 (*). Пусть дано вполне несвязное компактное хаусдорфово топологическое пространство M. Докажите, что каждая точка $x \in M$ является пересечением всех открытозамкнутых подмножеств M, которые ее содержат.

Указание. Пусть P – пересечение всех открытозамкнутых подмножеств M, которые содержат x. Очевидно, что оно замкнуто. Докажите, что оно равно $\{x\}$ либо несвязно. Если оно несвязно, P распадается в объединение двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств P_1, P_2. Воспользовавшись тем, что в компактном хаусдорфовом пространстве выполняется T4 (докажите это), найдем у P_1, P_2 непересекающиеся открытые окрестности U_1, U_2. Выведите из предыдущей задачи, что в $U_1 \cup U_2$ содержится открытозамкнутое подмножество $W \subset M$, содержащее x. Докажите, что $W \cap U_i$ открытозамкнуты, и выведите из этого, что P это $\{x\}$.

Задача 10.24 (*). Пусть дано вполне несвязное компактное хаусдорфово топологическое пространство M. Докажите, что открытозамкнутые множества образуют базу топологии M.

Указание. Пусть дано открытое подмножество $U \subset M$ и в нем точка x. Возьмем у каждой точки $M \backslash U$ открытозамкную окрестность, не содержащую x (докажите, что это можно сделать). Мы получим покрытие $\{U_\alpha\}$ множества $M \backslash U$. Поскольку $M \backslash U$ компактно, из $\{U_\alpha\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, ...U_n$. Докажите, что дополнение к $\cup U_i$ открытозамкнуто, содержит x и содержится в U.

Задача 10.25 (*). Пусть дано вполне несвязное компактное хаусдорфово топологическое пространство M, и пусть $x, y \in M$ – две различные точки. Докажите, что M допускает непрерывное отображение в $\{0, 1\}$ (с дискретной топологией) такое, что x переходит в 0, а y – в 1.

Задача 10.26 (*). Пусть дано вполне несвязное компактное хаусдорфово топологическое пространство M, и пусть I – множество всех непрерывных отображений M в $\{0, 1\}$. Определите естественное отображение $M \longrightarrow \{0, 1\}^I$. Докажите, что это непрерывное вложение, и что образ M замкнут.

Задача 10.27 (*). Пусть M - компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что следующие утверждения равносильны

(i) M вполне несвязно

(ii) M может быть вложено в $\{0, 1\}^I$ для какого-то множества индексов I.

Замечание. Напомним, что если компакт M допускает непрерывное инъективное отображение $f : M \to X$ в хаусдорфово пространство X, то f есть гомеоморфизм между M и $f(M) \subset X$ с индуцированной топологией.