ТОПОЛОГИЯ 1: Метрические пространства и норма.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Метрические пространства и норма.

Определение 1.1. Метрическое пространство есть множество X, снабженное такой функцией $d: X \times X \to \mathbb{R}$, что

а. Для любых $x, y \in X$ имеем $d(x,y) \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$.

б. Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$

в. “Неравенство треугольника”: для любых $x, y, z \in X$,
$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

Функция d, удовлетворяющая этим условиям, называется **метрикой**. Число $d(x,y)$ называется “расстоянием между x и y”.

Если $x \in X$ – точка, а ε – вещественное число, множество
$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \ \mid \ d(x,y) < \varepsilon$$
называется **(открытый) шар радиуса** ε **с центром в** x. Такой шар еще называется ε**-шар**. Замкнутый шар определяется как
$$\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \ \mid \ d(x,y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Задача 1.1. Рассмотрим любое подмножество в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с функцией d, заданной как $d(a,b) = |ab|$, где $|ab|$ – длина отрезка $[a,b]$ на плоскости. Докажите, что это метрическое пространство.

Задача 1.2. Рассмотрим такую функцию $d_\infty: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$(x,y),(x',y') \mapsto \max(|x-x'|, |y-y'|).$$
Докажите, что это – метрика. Опишите единичный шар с центром в нуле.

Задача 1.3. Рассмотрим такую функцию $d_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$(x, y), (x', y') \mapsto |x - x'| + |y - y'|.$$

Докажите, что это – метрика. Опишите единичный шар с центром в нуле.

Задача 1.4 (*). Функция $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$ называется **выпуклой вверх**, если $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, для любого вещественного $\lambda \in [0, 1]$. Пусть f – такая функция, а X, d – метрическое пространство. Предположим, что $f(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. Докажите, что функция $d_f(x, y) = f(d(x, y))$ задает метрику на X.

Задача 1.5 (*). Докажите, что любая выпуклая функция на $\mathbb{R}$ непрерывна.

Задача 1.6. Пусть V – линейное пространство с положительно определенной билинейной симметричной формой $g(x, y)$ (в дальнейшем мы будем называть такую форму **скалярным произведением**). Определим "расстояние" $d_g: V \times V \to \mathbb{R}$ как $d_g(x, y) = \sqrt{g(x-y, x-y)}$. Докажите, что $d(x, y) \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$.

Определение 1.2. Пусть $x \in V$ – вектор векторного пространства. **Параллельный перенос на вектор** x – это отображение $P_x: V \to V$, $y \mapsto y + x$.

Задача 1.7. Докажите, что функция d_g "инвариантна относительно параллельных переносов", т.е. $d_g(a, b) = d_g(P_x(a), P_x(b))$.

Задача 1.8 (!). Докажите, что d_g удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\sqrt{g(x-y, x-y)} \leqslant \sqrt{g(x, x)} + \sqrt{g(y, y)}$$

Указание. Рассмотрим подпространство $V_0 \subset V$, порожденное x и y. Докажите, что оно либо одномерно, либо изоморфно, как пространство со скалярным произведением, пространству $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $g((x, y), (x', y')) = xx' + yy'$. Воспользуйтесь неравенством треугольника для $\mathbb{R}^2$.

Задача 1.9 (!). Докажите, что d_g – это метрика.

Указание. Пользуясь инвариантностью относительно параллельных переносов, сведите эту задачу к предыдущей.

Определение 1.3. Пусть V – пространство со скалярным произведением g, а d_g – метрика, построенная выше. Эта метрика называется **евклидовой.**

Выпуклые множества.

Определение 1.4. Пусть V – линейное пространство, $P_x: V \to V$ – параллельный перенос, а $V_1 \subset V$ – одномерное подпространство. Тогда образ $P_x(V_1)$ называется **прямой** в V.

Задача 1.10. Даны две разные точки $x, y \in V$. Докажите, что существует единственная прямая $V_{x,y}$, проходящая через x и y.

Определение 1.5. Пусть l прямая, проведенная через точки x и y, a - точка, ляжащая на l. Мы говорим, что a лежит **между** x, y, если $d(x, a) + d(b, y) = d(x, y)$. **Отрезок прямой между** x **и** y (обозначается $[x, y]$) есть множество всех точек прямой $V_{x,y}$, которые "лежат между" x и y.

Задача 1.11. Даны три разные точки на прямой. Докажите, что одна (и только одна) из этих точек лежит между другими. Докажите, что отрезок $[x, y]$ – это множество всех точек z вида $ax + (1 - a)y$, где $a \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Определение 1.6. Пусть V – линейное пространство, а $B \subset V$ – некоторое подмножество. Говорят, что подможество B **выпуклое**, если для любых $x, y \in V$, B содержит все точки отрезка $[x, y]$.

Определение 1.7. Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$. **Нормой** на V называется такая функция $\rho : V \to \mathbb{R}$, что выполняются следующие свойства.

а. Для любого $v \in V$ имеем $\rho(v) \geqslant 0$. Более того, $\rho(v) > 0$ для всех ненулевых v.

б. $\rho(\lambda v) = |\lambda|\rho(v)$

в. Для любых $v_1, v_2 \in V$ выполнено $\rho(v_1 + v_2) \leqslant \rho(v_1) + \rho(v_2)$.

Задача 1.12. Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $\rho : V \to \mathbb{R}$ – норма на V. Рассмотрим функцию $d_\rho : V \times V \to \mathbb{R}$, $d_\rho(x, y) = \rho(x - y)$. Докажите, что это метрика на V.

Задача 1.13 (*). Пусть $d : V \times V \to \mathbb{R}$ – метрика на V, инвариантная относительно параллельных переносов. Предположим, что d удовлетворяет условию

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Докажите, что d получается из нормы $\rho : V \to \mathbb{R}$ по формуле $d(x, y) = \rho(x - y)$.

Задача 1.14. Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$, а $\rho : V \to \mathbb{R}$ – норма на V. Рассмотрим множество $B_1(0)$ всех точек с нормой $\leqslant 1$. Докажите, что это множество выпукло.

Определение 1.8. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, а v ненулевой вектор. Тогда множество всех векторов вида $\{\lambda v, \ | \ \lambda > 0\}$ называется **лучом в** V.

Определение 1.9. **Центральная симметрия** в V – это отображение $x \mapsto -x$.

Задача 1.15 (*). Пусть центрально симметричное выпуклое множество $B \subset V$ не содержит лучей и пересекается с каждым лучом $\{\lambda v, \ | \ \lambda > 0\}$. Рассмотрим функцию

$$v \overset{\rho}{\mapsto} \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^{>0} \ | \ \lambda^{-1} v \notin B\}$$

Докажите, что это норма на V. Докажите, что все нормы получаются таким образом.

Замечание. Эту функцию обыкновенно называют "функционал Минковского, построенный по телу".

Метрики на абелевых группах

Задача 1.16. Пусть G – абелева группа, а $\nu: G \to \mathbb{R}$ функция, которая принимает неотрицательные значения, и положительные значения для всех ненулевых $g \in G$. Предположим, что $\nu(a+b) \leqslant \nu(a) + \nu(b)$, $\nu(0) = 0$, а также что $\nu(g) = \nu(-g)$ для всех $g \in G$. Докажите, что функция $d_\nu: G \times G \to \mathbb{R}$, $d_\nu(x,y) = \nu(x-y)$ – это метрика на G.

Задача 1.17. Метрика d на абелевой группе G называется **трансляционно инвариантной**, если $d(x+g, y+g) = d(x,y)$ для всех $x, y, g \in G$. Докажите, что любая трансляционно инвариантная метрика d получена из некоторой функции $\nu: G \to \mathbb{R}$ по формуле $d(x,y) = \nu(x-y)$.

Определение 1.10. Зафиксируем простое число $p \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию $\nu_p: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, которая ставит числу $n = p^k r$ (r не делится на p) в соответствие число p^{-k}, а $\nu_p(0) = 0$. Эта функция называется **p-адическим нормированием на $\mathbb{Z}$**.

Задача 1.18. Докажите, что функция $d_p(m,n) = \nu_p(n-m)$ задает метрику на $\mathbb{Z}$. Эта метрика называется **p-адической метрикой на $\mathbb{Z}$**.

Указание. Проверьте соотношение $\nu_p(a+b) \leqslant \nu(a)+\nu(b)$ и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 1.11. Пусть R – кольцо, а $\nu: R \to \mathbb{R}$ – функция, которая принимает неотрицательные значения, и положительные значения для всех ненулевых r. Предположим, что $\nu(r_1 r_2) = \nu(r_1)\nu(r_2)$, а $\nu(r_1 + r_2) \leqslant \nu(r_1) + \nu(r_2)$. Тогда ν называется **нормированием** кольца R. Кольцо, снабженное нормированием, называется **нормированное кольцо**.

Замечание. Как видно из вышеприведенных задач, нормирование на кольце R определяет инвариантную метрику на R. В дальнейшем любое нормированное кольцо будет рассматриваться как метрическое пространство.

Задача 1.19 (!). Докажите, что ν_p – нормирование на кольце $\mathbb{Z}$. Определите нормирование на $\mathbb{Q}$, которое продолжает ν_p.