ТОПОЛОГИЯ, контрольная 2 (к листкам 3-6)).

Каждому студенту выдается по 5 задач; число очков за контрольную равно $\max(3t, 10)$, где t – число решенных задач. Решение письменное, сдается до 13:00 пятницы, 25-го мая. На каждой сданной работе должна быть пометка, подписанная экзаменатором, следующего содержания: фамилия, имя, какие задачи получены.

2.1. Метрические пространства

Задача 2.1. Докажите, что каждое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно получить как объединение счетного набора замкнутых.

Определение 2.1. Пусть M – метрическое пространство, $d(x, y)$ – метрика. Напомню, что **неравенство неархимеда** есть неравенство $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(y, z))$. Метрическое пространство, в котором выполнено это неравенство для всех x, y, z, называется **неархимедовым**.

Задача 2.2. Верно ли, что каждый открытый шар метрического пространства с неархимедовой метрикой замкнут?

Задача 2.3. Пусть M – метрическое пространство. Постройте изометрическое вложение из M в векторное пространство с метрикой, определенной из какой-то нормы.

2.2. Топология, сходимость, счетная база

Определение 2.2. Топология левых пределов есть топология на $\mathbb{R}$, базой которой является множество всех полуинтервалов вида $[a, b[$.

Задача 2.4. Докажите, что топология левых пределов есть самая сильная топология на прямой $\mathbb{R}$, в которой сходится к своему пределу любая невозрастающая последовательность Коши (топология называется "более сильной", если в ней больше открытых множеств).

Задача 2.5. Пусть X – топологическое пространство со счетной базой, $\{U_\alpha\}$ – набор непересекающихся открытых подмножеств. Докажите, что $\{U_\alpha\}$ счетно.

Задача 2.6. Пусть X – топологическое пространство со счетной базой, а B – база топологии для X. Докажите, что $B \supset B'$, где B' – счетная база.

2.3. Сепарабельность

Задача 2.7. Пусть M – сепарабельное хаусдорфово топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, а $Z \subset M$ любое подмножество, с индуцированной топологией. Докажите, что Z тоже сепарабельно.

Задача 2.8. Пусть M – сепарабельное метрическое пространство. Докажите, что мощность M не больше континуума.

Задача 2.9. Докажите, что любое компактное метрическое пространство сепарабельно.

Задача 2.10. Докажите, что $\mathbb{R}$ с топологией левых пределов сепарабельно и не имеет счетной базы.

2.4. Компактность

Задача 2.11. **Спектр** кольца R есть множество его простых идеалов. **Топология Зариского** на спектре задана базой из открытых множеств вида A_f, где $f \in R$ какой-то элемент, а A_f – множество всех идеалов, не содержащих f. Докажите, что спектр любого кольца компактен.

Задача 2.12. Пусть - компактное топологическое пространство, а $\mathbb{R}_s$ есть $\mathbb{R}$ с топологией левых пределов. Докажите, что непрерывная функция $M \longrightarrow \mathbb{R}_s$ достигает минимума.

Задача 2.13. Докажите, что $\mathbb{R}$ с топологией левых пределов не локально компактно.

Задача 2.14. Пусть M – локально компактное метрическое пространство. Докажите, что M гомеоморфно подмножеству компактного хаусдорфова пространства.

2.5. Аксиомы отделимости

Задача 2.15. Пространство X называется **слабо хаусдорфовым**, если все компактные подмножества X замкнуты. Постройте слабо хаусдорфово пространство, которое не хаусдорфово.

Задача 2.16. Пусть X – компактное, хаусдорфово топологическое пространство, а X' – то же самое пространство, с топологией, которая *строго слабее*, чем на X (то есть содержит меньше открытых подмножеств). Докажите, что X' не хаусдорфово.

Определение 2.3. Напомню, что топологическое пространство X **регулярно**, если любая точка x, не принадлежащая заданному замкнутому подмножеству $Z \subset X$, содержится в окрестности U, такой, что $\bar{U} \cap Z = \emptyset$, где $\bar{U}$ обозначает замыкание U.

Определение 2.4. Пространство называется **тихоновским**, если оно гомеоморфно подмножеству **бесконечномерного куба**, то есть произведения (возможно, несчетного количества) копий отрезка, с топологией произведения ("тихоновской").

Задача 2.17. Докажите, что любое тихоновское пространство регулярно.

Задача 2.18. Пусть $X = \mathbb{R}$ с топологией левых пределов. Докажите, что X тихоновское.