ТОПОЛОГИЯ, контрольная 1 (к листкам 1-2).

Каждому студенту выдается по 6 задач; число очков за контрольную равно $\max(2t, 10)$, где t – число решенных задач

Решение письменное, сдается до 12:00 среды, 25-го апреля. На каждой сданной работе должна быть пометка, подписанная экзаменатором, следующего содержания: фамилия, имя, какие задачи получены.

1.1. Метрические пространства

Определение 1.1. Напомню, что **непрерывное отображение** метрических пространств есть отображение, переводящее сходящиеся последовательности в сходящиеся последовательности, а предел сходящейся последовательности в предел ее образа.

Задача 1.1. Постройте отображение метрических пространств, которое непрерывно, но переводит какую-то последовательность Коши в последовательность, которая не Коши.

Определение 1.2. Обозначим за $B_\varepsilon(z)$ **замкнутый шар** радиуса ε с центром в z, $B_\varepsilon(z) := \{x \in M \ \mid \ d(z,x) \leqslant \varepsilon\}$. Обозначим за $B^\circ_\varepsilon(z)$ **открытый шар** $B_\varepsilon(z) := \{x \in M \ \mid \ d(z,x) < \varepsilon\}$.

Задача 1.2. Пусть M – счетное метрическое пространство. Докажите, что для каких-то ε, z, открытый шар равен замкнутому: $B^\circ_\varepsilon(z) = B_\varepsilon(z)$.

Задача 1.3. Пусть $\{U_i\}$ – набор открытых интервалов на прямой. Предположим, что $\mathbb{Q} \subset \bigcup_i U_i$. Докажите, что $\bigcup_i U_i = \mathbb{R}$, или приведите контрпример.

1.2. p-адические числа

Определение 1.3. Пусть $\sum_{i=0}^\infty a_i z^i$ степенной ряд с p-адическими коэффициентами. **Радиус сходимости** ряда есть наибольшее p^N, для которого $\phi(z)$ сходится в шаре радиуса p^N в $\mathbb{Q}_p$ с центром в 0, или 0, если такого шара нет.

Задача 1.4. Вычислите радиус сходимости для степенных рядов (а) $\sum \frac{z^i}{p^i}$ (б) $\sum \frac{z^i}{i}$ (в) $\sum \frac{z^i}{p^{i^2}}$ (г) $\sum p^i z^i$ (д) $\sum \frac{z^i}{i}$. Обоснуйте ваше решение доказательством.

Задача 1.5. Докажите, что следующие p-адические числа, записанные в виде бесконечной последовательности в p-ичной системе счисления, рациональны. Представьте их в виде частного двух целых. Обоснуйте ваше решение. (а) ...2121212121212121 в $\mathbb{Z}_5$. (б) ...31313131313131 в $\mathbb{Z}_7$. (в) ...9999999999999999 в $\mathbb{Z}_{13}$.

Задача 1.6. Докажите, что функция из $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{Q}_p$ $\phi(z) = \sum p^{i^2} z^i$ всюду определена и непрерывна.

Задача 1.7. Докажите, что бесконечное произведение $\prod_{i=0}^\infty (1+z^i p^{i^2})$ сходится для всех $z \in \mathbb{Q}_p$.

1.3. Неархимедовы метрические пространства

Определение 1.4. Пусть M – метрическое пространство, $d(x, y)$ – метрика. Напомню, что **неравенство неархимеда** есть неравенство $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(y, z))$. Метрическое пространство, в котором выполнено это неравенство для всех x, y, z, называется **неархимедовым**.

Задача 1.8. Докажите, что для любых точек z_1, z_2 в неархимедовом пространстве, таких, что $d(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon$, имеет место равенство шаров: $B_\varepsilon(z_1) = B_\varepsilon(z_2)$.

Задача 1.9. Пусть метрика на M принимает значения в множестве $p^{-\alpha}$, где $p > 2$, а $\alpha \in \mathbb{Z} \cup \infty$. Докажите, что M неархимедово.

Задача 1.10. Пусть M неархимедово. Докажите, что его пополнение тоже неархимедово.

1.4. Непрерывные отображения

Задача 1.11. Пусть M метрическое пространство, а $d(x, \cdot) : \ M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – функция, переводящая z в $d(x, z)$. (а) Докажите, что $d(x, \cdot)^{-1}$ непрерывна в $M \backslash x$. (б) Докажите, что произведение $d(x, \cdot) d(y, \cdot)$ непрерывно на M для любых x, y.