Топология, 4-й модуль: экзамен.

Каждому студенту выдается по 6 задач; число очков за экзамен равно $\min(7t, 30)$, где t – число решенных задач. Решение устное, сдается принимающему.

Метрические пространства и пополнение

Задача 3.1. Пусть $z = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$, $0 \leqslant a_i < p$ – целое p-адическое число. Докажите, что последовательность a_i периодическая тогда и только тогда, когда z рационально (имеет вид $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$).

Определение 3.1. Напомним, что **изолированной точкой** топологического пространства называется одноточечное подмножество, которое открыто.

Задача 3.2. Пусть M – компактное, бесконечное метрическое пространство без изолированных точек. Может ли M быть счетно?

Задача 3.3. Пусть $f: \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция на пространстве p-адических чисел. Определим $\int_{\mathbb{Z}_p} f$ как предел

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f := \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{p^N} \sum_{i=0}^{p^N - 1} f(i)$$

(здесь мы рассматриваем f как функцию на $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$). Докажите, что этот предел существует. Докажите, что $|f|_{L^1} := \int_{\mathbb{Z}_p} |f|$ задает норму на пространстве $C(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на $\mathbb{Z}_p$.

Задача 3.4. Пусть M – компактное метрическое пространство, $S \subset \mathbb{R}$ – множество значений, которые принимает метрика на M. Может ли S быть равно $\left\{0, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, ...\right\}$? А $\mathbb{Q}$?

Определение 3.2. Пусть $M > 1$ – целое число. Определим метрику d_m на $\mathbb{Z}$ формулой $d(x, y) = m^{-\nu_m(x-y)}$, где $\nu_m(z)$ есть число нулей, которыми заканчивается m-ичная запись $z \in Z$. Обозначим за $\mathbb{Z}_m$ пополнение $\mathbb{Z}$ по такой метрике. Заметим что для простого m таким образом определялись m-адические числа. Для произвольного m, $\mathbb{Z}_m$ – снова кольцо; это доказывается так же, как и для $\mathbb{Z}_p$.

Задача 3.5. Докажите, что в $\mathbb{Z}_{10}$ есть делители нуля.

Определение 3.3. Липшицева функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ – функция, которая удовлетворяет $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$.

Задача 3.6. Пусть M метрическое пространство, $z \in M$ фиксированная точка а $\mathcal{F}$ – счетный набор липшицевых функций $\alpha: M \longrightarrow \mathbb{R}$, которые удовлетворяют $\alpha(z) \leqslant 0$. Определим $F(m) := \sup_{\alpha \in \mathcal{F}} \alpha(m)$. Докажите, что $F(m) < \infty$, для всех $m \in M$. Докажите, что F – липшицева функция.

Аксиомы Хаусдорфа, счетная база, компактность

Определение 3.4. Напомним, что топологическое пространство M называется **регулярным**, если для каждой точки $x \in M$, и для каждого замкнутого подмножества $Z \subset M$, не содержащего x, у Z и x найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 3.7. Дано локально компактное, хаусдорфово пространство. Всегда ли оно регулярно?

Задача 3.8. Пусть M – хаусдорфово, регулярное пространство. Докажите, что любое замкнутое подмножество M – пересечение открытых.

Определение 3.5. Напомним, что непрерывное отображение называется **собственным**, если прообраз любого компактного множества – компакт, **замкнутым**, если образ любого замкнутого множества замкнут, и **открытым**, если образ любого открытого открыт.

Задача 3.9. Приведите пример непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, которое

а. открыто, не собственно, не замкнуто

б. замкнуто, не собственно, не открыто

или докажите, что их не существует.

Задача 3.10. Приведите пример непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, которое:

а. замкнуто, собственно, не открыто

б. замкнуто и открыто, но не гомеоморфизм

или докажите, что их не существует.

Задача 3.11. Пусть $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – собственное, непрерывное отображение, где M хаусдорфово. Докажите, что ϕ замкнуто.

Определение 3.6. **Вполне упорядоченное множество** есть множество M, снабженное линейным порядком, таким образом, что у каждого непустого подмножества M есть минимальное.

Задача 3.12. Пусть – несчетное, вполне упорядоченное множество, каждый отрезок $[a, b]$ которого счетен. Снабдим M топологией, базой которой будут интервалы вида $]a, b[$. Докажите, что M секвенциально компактно (каждая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность). Докажите, что оно некомпактно.

Произведения топологических пространств, теорема Тихонова и метризуемость

Задача 3.13. Пусть M компактно и хаусдорфово, R – кольцо непрерывных функций $M \longrightarrow \mathbb{R}$, а I – максимальный идеал в R. Докажите, что существует точка $x \in M$ такая, что I – идеал функций, зануляющихся в x.

Задача 3.14. Пусть $X \xrightarrow{\phi} Y$ – некоторое отображение топологических пространств (не обязательно непрерывное), X, Y компактны, X хаусдорфово, а график ϕ замкнут. Докажите, что ϕ непрерывно. Необходима ли для этого компактность X? А компактность Y?

Задача 3.15. **Гильбертово пространство** есть пространство последовательностей $\{a_i\}$ вещественных чисел, удовлетворяющих $\sum_i a_i^2 < \infty$, с нормой $|\{a_i\}| = \sqrt{\sum_i a_i^2}$. Докажите, что замкнутый шар в гильбертовом пространстве никогда не компактен.

Определение 3.7. **Двоеточие** $\mathbb{D}$ есть множество из двух элементов с дискретной топологией. **Тихоновское двоеточие** есть $\mathbb{D}^{\mathbb{Z}}$ произведение счетного набора двоеточий с тихоновской топологией.

Определение 3.8. Открытозамкнутое множество есть подмножество топологического пространства, которое открыто и замкнуто. **Вполне несвязное топологическое пространство** есть топологическое пространство с базой топологии, состоящей из открытозамкнутых множеств.

Задача 3.16. Пусть M – компактное, хаусдорфово, вполне несвязное топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M гомеоморфно подмножеству в $\mathbb{D}^{\mathbb{Z}}$.

Задача 3.17. Рассмотрим топологию на прямой $\mathbb{R}$, база которой состоит из полуинтервалов вида $[a, b[$. Докажите, что $\mathbb{R}$ с такой топологией не метризуемо.

Определение 3.9. Секвенциально компактное топологическое пространство есть топологическое пространство, в котором каждая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Задача 3.18. Пусть M – хаусдорфово, секвенциально компактное топологическое пространство. Докажите, что $M^{\mathbb{Z}}$ (счетное произведение M с собой) тоже секвенциально компактно.