Гамильтоновы действия тора и теорема Атьи-Гийемина-Стернберга.

1. Симплектические многообразия

Определение 1. Гладкое многообразие M называется *симплектическим многообразием*, если на M задана 2-форма ω, называемая *симплектической формой*, которая замкнута и всюду невырожденна. Для краткости будем многообразие с заданной на нем симплектической формой будем обозначать через (M, ω).

Из определения сразу следует, что размерность M четна, поскольку невырожденные кососимметрические формы существуют лишь в четных размерностях. Если $\dim M = 2n$, то эквивалентный способ определить невырожденность 2-формы ω – указать, что старшая внешняя степень ω^n является *формой объема*, то есть отлична от нуля во всех точках многообразия M. Форма объема задает каноническую ориентацию на M.

Определение 2. Если (M, ω_M) и (N, ω_N) – симплектические многообразия, то отображение $f\colon M \to N$ называется *симплектоморфизмом*, если $f^*\omega_N = \omega_M$ и f биективно.

Из определения следует, что f является диффеоморфизмом, так как в противном случае обратный образ $f^*\omega_N^n$ старшей степени симплектической формы ω был бы нулевым в точке, где дифференциал отображения f имел бы нетривиальное ядро.

В отличие от многообразий, снабженных римановой метрикой, симплектические многообразия не имеют никаких локальных инвариантов.

Теорема 3. *(Дарбу). Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие и $x \in M$ – некоторая точка. Тогда существует окрестность $U \subset M$ точки x и отображение $f\colon U \to U_0$ такое, что $f^*\omega_0 = \omega$. Здесь ω_0 – симплектическая форма с постоянными коэффициентами, определенная в некоторой окрестности евклидова пространства $U_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$, и $f(x) = 0$.*

Существование симплектической структуры накладывает ряд условий на топологию многообразия. Очевидно, что поскольку $d\omega = 0$ и $\omega^n \neq 0$, когомологии де Рама многообразия M обязаны быть нетривиальны в четных размерностях, если M компактно. Менее очевидное условие – что симплектическое многообразие M также является *почти комплексным*, то есть в каждой точке многообразия задан оператор $J \in \mathrm{End}(TM)$ такой, что $J^2 = -id$.

Рассмотрим произвольную гладкую риманову метрику g на M. В каждой точке $x \in M$ определен оператор A, однозначно задающийся условием $g(X, AY) = \omega(X, Y)$ для всех $X, Y \in T_x(M)$. Коэффициенты оператора A выражаются через коэффициенты g и ω как рациональные функции, нигде не обращающиеся в ноль; а коэффициенты g и ω гладко зависят от точки $x \in M$. Рассмотрим полярное разложение оператора A: $A = BJ$, где

- B – симметрический (относительно g) положительно определенный оператор, коммутирующий с A,
- J ортогонален относительно g.

Лемма 4. *Оператор J удовлетворяет тождеству $J^2 = -id$ и согласован с формой ω, то есть $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$.*

Почти комплексная структура J называется *согласованной* с симплектической формой ω, если $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ и $\omega(x, \ Jx) \ > \ 0$. Наличие римановой метрики позволяет всегда построить согласованную с данной формой почти комплексную структуру.

Далее нас будут интересовать действия групп на компактных многообразиях, сохраняющие некоторую симплектическую форму. *Действие* группы G на многообразии M – это гомоморфизм из G в некоторую группу $Aut(M)$ автоморфизмов M. В случае, когда рассматриваются гладкие действия группы на многообразии M, группа $Aut(M)$ совпадает с группой диффеоморфизмов M на себя. В нашем случае $Aut(M)$ является $Sympl(M)$ – *группой симплектоморфизмов* гладкого многообразия. По определению, $f \in Sympl(M)$, если $f\colon M \to M$ – гладкое биективное отображение M в себя и $f^*\omega = \omega$.

Теорема 5. *(эквивариантная версия теоремы Дарбу). Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие с симплектическим действием группы G, а $x \in M$ – некоторая неподвижная точка действия. Тогда существует G-инвариантная окрестность $U \subset M$ точки x и отображение $f\colon U \to U_0$ такое, что $f^*\omega_0 = \omega$, где ω_0 – симплектическая форма с постоянными коэффициентами, определенная в некоторой окрестности евклидова пространства $U_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$, а $f(x) = 0$. Отображение f эквивариантно относительно касательного представления группы G в точке x.*

Мы будем предполагать, что группа G – компактная и абелева, то есть является *компактным тором* T^k, где $k \geqslant 1$. В случае $k = 1$ группа G совпадает с мультипликативной группой комплексных чисел, по модулю равных единице, или просто *окружностью* S^1. Потребуем, чтобы действие группы G на многообразии M имело лишь изолированные неподвижные точки. Если M компактно, то это означает, что число неподвижных точек конечно.

Отфакторизовав по подгруппе, действующей на M тривиально, получим эффективное действие тора T^k на M.

Условие сохранения симплектической структуры относительно действия является локальным и может быть записано в аналитических терминах. Пусть $H \subset T^k$ – некоторая одномерная параметрическая подгруппа, определяемая вектором $X \in \mathbb{R}^k$, лежащим в соответствующей алгебре Ли тора T^k. В случае $k = 1$ подгруппа H совпадает со всей группой $T^k = S^1$.

Формула Картана утверждает, что

$$\mathcal{L}_X\omega = d(i_X(\omega)) + i_X(d\omega),$$

где $L_X(\omega)$ – производная Ли формы ω вдоль векторного поля X, а под формой $i_X(\eta)$ понимается результат подстановки в дифференциальную форму η векторного поля X как первого аргумента, в результате чего размерность формы снижается на единицу. Условие, что форма ω инвариантна относительно действия, эквивалентно тому, что $L_X\omega = 0$ для инфинитезимального векторного поля действия X всюду на M. С другой стороны, $d\omega = 0$ и $i_X(d\omega) = 0$ на любом симплектическом многообразии, поскольку симплектическая форма замкнута.

Тем самым, условие инвариантности симплектической формы относительно действия равносильно условию $d(i_X(\omega)) = 0$, то есть замкнутости формы $i_X(\omega)$.

2. Гамильтоновы действия тора и их свойства

Определение 6. Действие T^k на M называется *гамильтоновым* если форма $i_X(\omega)$ точна для любого вектора $X \in \mathbb{R}^k$: $i_X(\omega) = dH$, где $H\colon M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, называемая в этой ситуации *гамильтонианом.*

Поскольку любая замкнутая форма локально точна, ясно, что гамильтоновы действия не так уж редки среди всех симплектических действий тора. Как минимум, любое симплектическое действие на многообразии M обязано быть гамильтоновым, если $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Имеется ряд результатов о том, когда симплектические действия тора являются гамильтоновыми, но до сих пор не известно, например, существует ли симплектическое действие окружности, имеющее лишь изолированные неподвижные точки, но не являющееся гамильтоновым.

Более общо, векторное поле X называется *гамильтоновым*, если точна форма $i_X(\omega)$.

Определение 7. Гладкая функция F на многообразии M называется *функцией Морса-Ботта*, если множеством ее критических точек является несвязное объединение связных подмногообразий $Z_i \subset M$ таких, что гессиан функции F, ограниченный на пространство $\nu_x(Z_i) = T_x(M)/T_x(Z_i)$ в каждой точке $x \in Z_i$ невырожден.

В частности, если критические точки функции F изолированы, F является функцией Морса в традиционном смысле. Оказывается, если H – замкнутая однопараметрическая подгруппа тора T^k, действующего на M гамильтоново, то соответствующий подгруппе H гамильтониан обязательно является функцией Морса-Ботта. Мы докажем этот результат в чуть большей общности, которая затем потребуется для теоремы о выпуклости образа отображения моментов.

Определение 8. Функция F на M называется *почти периодическим гамильтонианом*, если фазовый поток векторного поля X, определяемого правилом $i_X(\omega) = dF$, порождает в группе диффеоморфизмов M в себя замкнутую подгруппу, изоморфную тору. (Замыкание берется, например, в топологии, индуцированной топологией на метризованном пространстве касательного расслоения к M).

Почти периодические гамильтонианы удобнее периодических, поскольку этот класс замкнут относительно взятия линейной комбинации с вещественными коэффициентами – замкнутая подгруппа тора и произведение двух торов снова изоморфны некоторому тору.

Лемма 9. *Пусть G – компактная группа Ли, действующая гладко на многообразии M. Множество неподвижных точек действия группы G является несвязным объединением гладких подмногообразий в M.*

Теорема 10. *Почти периодический гамильтониан F является функцией Морса-Ботта. Его критические подмногообразия совпадают с подмногообразиями, неподвижными относительно действия тора T^k, порожденного фазовым потоком поля X, где $i_X(\omega) = dF$. Каждое критическое подмногообразие является симплектическим.*

Докажем это утверждение. Множество точек, неподвижных относительно действия тора T^k, совпадает со множеством точек, неподвижных относитетельно фазового потока X, так как действие T^k – замыкание действия потока X.

Условие, что $x \in M$ не является неподвижной точкой действия тора T^k, равносильно тому, что $i_X(\omega) \neq 0$ (форма ω невырожденна), а $i_X(\omega) = dF$ по определению гамильтоновости. Поэтому доказательства требует лишь утверждение о том, что F является функцией Морса-Ботта.

Пусть Z – некоторая связная компонента множества неподвижных точек действия тора T^k (и фазового потока X). Чтобы описать поведение тора T^k и функции F вблизи Z, нам потребуется почти комплексная структура, согласованная с формой ω.

Введем на M T^k-инвариантную риманову метрику; тогда, как было показано раньше, на M возникает и почти комплексная структура J, согласованная с формой ω. Важно отметить, что конструкция оператора J переносится без изменений на эквивариантный случай, поэтому можно считать, что действие тора T^k коммутирует с оператором J. Поскольку J ортогонален относительно введенной римановой метрики, в любой точке $x \in Z$ касательное и нормальное пространства $T_x(Z)$ и $\nu_x(Z)$ являются J-инвариантными – а также и T^k-инвариантными поскольку риманова метрика T^k-инвариантна. Отсюда, в частности, следует, что Z является симплектическим подмногообразием в M, поскольку $\omega(x, Jx) > 0$.

Действие T^k на $T_x(M)$ распадается на n неприводимых одномерных линейных представлений $V_1, \ldots, V_n$, каждое из которых комплексно-инвариантно. Без ограничения общности можем считать, что первые m представлений соответствуют разложению в прямую сумму пространства $T_x(Z) \subset T_x(M)$. Используем теперь эквивариантную теорему Дарбу в окрестности точки x: существует локальная система координат (p_i, q_i) в окрестности $U \subset M$ точки x, в которой форма имеет стандартный вид $\sum dp_i \wedge dq_i$, а действие тора T^k линейно на каждом из пространств $V_1, \ldots, V_n$. Каждое пространство линейного представления V_i в точке x совпадает с пространством, порожденным координатами p_i и q_i.

Действие элемента $\exp(tX)$, $t \in \mathbb{R}$, на нормальном пространстве $\nu_x(Z)$ также распадается в прямую сумму действий на координатных пространствах $V_{m+1}, \ldots, V_n$, поскольку $\exp(tX) \in T^k$. Локально мы можем записать это действие в виде

$$\exp(tX) = (\exp(2\pi i t\lambda_{m+1}), \ldots \exp(2\pi i t\lambda_n)),$$

где $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ – некоторые вещественные числа (отличные от нуля, так как действие нетривиально на нормальном пространстве к Z).

Поскольку в данной системе координат ω выглядит как стандартная симплектическая форма, получаем, что

$$X = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j (q_j \frac{\partial}{\partial p_j} - p_j \frac{\partial}{\partial q_j}),$$

и следовательно,

$$dF = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j (p_j dp_j + q_j dq_j),$$

$$F = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j (p_j^2 + q_j^2) + const,$$

откуда, в частности, следует, что гессиан функции F невырожден на пространстве $V_{m+1} \oplus \ldots \oplus V_n = \nu_x(Z)$. Видно, что индекс критического подмногообразия Z равен удвоенному числу отрицательных коэффициентов λ_j. Этот индекс постоянен на каждом связном критическом подмногообразии Z.

Лемма 11. *Почти периодический гамильтониан F имеет единственное критическое подмногообразие локального минимума Z_{min} и единственное критическое подмногообразие локального максимума Z_{max}. Для любого $t \in \mathbb{R}$ прообраз $F^{-1}(t)$ пуст или связен.*

Из теории функций Морса-Ботта известно, что

- $F^{-1}(t_0)$ и $F^{-1}(t_1)$ диффеоморфны, если между t_0 и t_1 нет критических значений,
- при проходе через критическое значение t, соответствующее связному критическому подмногообразию Z индекса λ, к гладкому многообразию $F^{-1}(t-\varepsilon)$ приклеивается векторное расслоение ранга 2λ над Z, соответствующее подрасслоению в $\nu(Z)$, ограничение гессиана F на которое строго отрицательно.

Поскольку сферизация расслоения ранга r над Z несвязна только при $r = 1$, но все Z имеют четный индекс, число связных компонент может измениться, только если F проходит через критическое значение индекса 0 или $2n$. Поскольку M связно, число критических значений каждого из индексов 0 и $2n$ равно единице.

Если существует регулярное значение $t \in \mathbb{R}$ такое, что слой $f^{-1}(t)$ является несвязным гладким подмногообразием, то, поскольку $f^{-1}(t)$ является границей подмногообразия $M_- = \{x \colon F(x) \leqslant t\}$, любая связная компонента $f^{-1}(t)$ задает нетривиальный цикл в $H_{n-1}(M, \mathbb{Z}_2)$, что невозможно.

Лемма 12. *Пусть F – произвольная функция Морса-Ботта на M. Если многообразия $f^{-1}(t)$ связны при всех регулярных значениях $t \in \mathbb{R}$, то это верно и для произвольных значений t.*

Доказательство леммы следует из того факта, что прообраз $F^{-1}(t)$ особого значения t гомотопически эквивалентен неособому связному прообразу $F^{-1}(t - \varepsilon)$ с приклейкой связного пространства (векторного расслоения над связным критическим подмногообразием).

3. Выпуклость образа отображения моментов

Теорема 13. *(теорема Атьи-Гийемина-Стернберга о выпуклости). Предположим, что $f_1, \dots, f_k$ – почти периодические гамильтонианы на связном компактном симплектическом многообразии M без края, причем соответствующие им векторные поля X_i, $i = 1 \dots k$, коммутируют. Если Z_j – связные компоненты множества общих нулей векторных полей $X_1, \dots, X_k$, то образ порожденного функциями f_i отображения $F\colon M \to \mathbb{R}^k$ является выпуклой оболочкой точек $F(Z_j)$.*

Введем утверждения A_m – «прообраз $F^{-1}(t)$ связен или пуст для любого $t \in \mathbb{R}^m$» и B_m – «образ $F(M)$ является выпуклым», в которых $F\colon M \to \mathbb{R}^m$ – отображение, удовлетворяющее условиям теоремы. Утверждение A_1 было доказано выше, а утверждение B_1 верно по очевидным причинам.

Покажем, что $A_{n-1} \Longrightarrow B_n$. Рассмотрим композицию

$$M \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{n-1},$$

где π – некоторая проекция на гиперплоскость. Компоненты отображения $g = \pi \circ F$ являются коммутирующими почти периодическими гамильтонианами, поэтому для g по предположению верно утверждение A_{n-1}.

Следовательно, прообраз $g^{-1}(t)$ линейно связен для любого t. Тогда и образ $F(g^{-1}(t)) = F(M) \cap \pi^{-1}(t)$ линейно связен для любого t – то есть является отрезком, поскольку лежит на прямой $\pi^{-1}(t)$. Поскольку $\pi^{-1}(t)$ пробегает множество всех прямых в $\mathbb{R}^n$, утверждение B_n доказано.

Докажем теперь по индукции, что A_n верно. Поскольку все f_i – почти периодические гамильтонианы, множество регулярных значений плотно в образе F, как показывают следующие общие утверждения о гладких действиях компактной группы G на компактном многообразии W. Будем называть *типом орбит* (H) класс сопряженности подгруппы $H \subset G$, где H – стабилизатор точки $x \in W$. Любая подгруппа из этого класса является стабилизатором некоторой точки из орбиты x.

Лемма 14. *Гладкое действие G на W имеет конечное число различных типов орбит.*

Лемма 15. *Если пространство орбит W/G гладкого действия группы G связно, то существует такой тип орбит (H), что множество точек со стабилизаторами из (H) образует плотное открытое подмножество в W.*

В частности, если G коммутативна, то (H) состоит из единственной подгруппы, действующей тривиально на всем W. Если действие $G = T^k$ на W эффективно, то объединение свободных орбит открыто и всюду плотно в W.

Вернемся к доказательству теоремы. В силу последней леммы можно считать, что функции $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы, в противном случае достаточно применить предположение индукции. По соображениям непрерывности достаточно доказать утверждение A_n для прообразов регулярных значений. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – регулярное значение функции F; докажем, что $F^{-1}(\xi)$ связно. Имеем $F^{-1}(\xi) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\xi_i)$. Рассмотрим неособое подмногообразие $N = \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} f_i^{-1}(\xi_i)$. Оно связно по предположению индукции.

Покажем, что функция f_n является функцией Морса-Ботта на N, имеющией только критические точки четных индексов. Критические точки f_n на N совпадают со множеством точек на N, в которых $df_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i df_i$. Пусть $\tilde{f} = df_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i df_i$ – соответствующий почти периодический гамильтониан. Множество критических точек $\tilde{f}$ является неособым подмногообразием Z в M, инвариантным относительно действия порожденного $\tilde{f}$ тора. В силу леммы о конечности числа типов орбит, множество различных построенных так подмногообразий $Z \subset M$ конечно.

Лемма 16. *Многообразия N и Z пересекаются трансверсально.*

Достаточно проверить, что дифференциалы $df_1, \ldots, df_{n-1}$ соответствующих функций на Z линейно независимы. Поскольку векторные поля X_i и $\tilde{X}$ (где $i_{\tilde{X}}(\omega) = d\tilde{f}$) коммутируют, многообразие Z инвариантно относительно действия всех полей $X_1, \ldots, X_{n-1}$ – то есть поля X_i, $i = 1 \ldots n-1$, являются касательными к Z. Ограничение симплектической формы ω на Z невырожденно. Поскольку $X_1, \ldots, X_{n-1}$ линейно независимы в касательном пространстве к M и при этом являются касательными к Z, для любой точки $z \in Z \cap N$ и линейной комбинации $\sum \alpha_i X_i$ существует вектор $Y \in T_z(Z)$ такой, что $\omega(\sum \alpha_i X_i, Y) \neq 0$, то есть $(\sum \alpha_i df_i(z))(Y) \neq 0$.

Осталось доказать последнее утверждение теоремы: что выпуклое тело – образ $F(M)$, на самом деле является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Если Z – множество нулей векторных полей $X_1, \ldots, X_n$, то Z является множеством неподвижных точек действия соответствующего компактного тора T^k и, тем самым, распадается в несвязное объединение критических подмногообразий Z_j. Отображение F постоянно на каждом Z_j. Заметим теперь следующее: если $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ – произвольный почти периодический гамильтониан, порождающий тор T^k, то одна из точек вида $F(Z_j)$ является его (не обязательно строгим) минимумом. Но гамильтонианы с таким свойством плотны в пространстве всех линейных комбинаций функций f_i. Отсюда следует, что образ $F(M)$ является выпуклой оболочкой точек $F(Z_j)$ – в противном случае некоторая линейная функция вида «нормаль к гиперграни выпуклой оболочки» достигала бы своего минимума вне Z.